

PROCESSING COF

Nodey

## INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

## CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

This material contains information affecting the National Defense of the United States within the meaning of the Espionage Laws, Title 18, U.S.C. Secs. 793 and 794, the transmission or revelation of which in any manner to an unauthorized person is prohibited by law.

S-E-C-R-E-T

25X1

COUNTRY	USSR	REPORT	
SUBJECT	Transmittal of Soviet Scientific Publications	DATE DISTR.	29 July 1957
		NO. PAGES	1
		REQUIREMENT NO.	RD C-1157
DATE OF INFO.		REFERENCES	ATTACHMENT(S) <del>NOT</del> 25X1
PLACE & DATE ACQ.			MICROFILMED <del>NOT</del> 25X1

SOURCE EVALUATIONS ARE DEFINITIVE APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE

unclassified Soviet scientific publications, in Russian

1. Paleobotanicheskiy Sbornik, Moscow, 1953.
2. Abastumanskaya Astrofizicheskaya Observatoriya, Gora Kanobili, Byulleten Issues 12 through 17.
3. Geologiya Kamchatki, 1957 (Sbornik Statey).
4. Devon Zapadnogo Priuralya, Leningrad, 1952.
5. Ocherki po Geologii SSSR, Volume I, 1956, and Volume II 1957, Leningrad.
6. Katalog Deystvuyushchikh Vulkanov SSSR, Moscow, 1957.
7. Stratigrafiya Chetvertichnykh Otlozheniy i Istoriya Razvitiya Kaspiyskogo Morya, Moscow, 1957.
8. Byulleten Stalinabadskoy Astronomicheskoy Observatorii, Numbers 18 and 19, Stalinabad, 1956-1957.
9. Geologiya Nefti, Volumes 3,4,5, and 6, Moscow, 1957.
10. Trudy Moskovskogo Instituta Inzhenerov Geodezii Aerofotoseмки i Kartografii, Moscow, 1957.
11. Nonionidy, Kassidulinidy, i Khilostomellidy, Leningrad, 1952.
12. Spirillinidy, Rotallidy, Epistominidy, i Asterigerinidy, Leningrad, 1953.
13. Standartizatsiya, Volumes 1 and 2, Moscow, 1957.
14. Podzemnaya Gazifikatsiya Ugley (Vozhekvartalnyy Byulleten), Moscow 1957.

25X1

S-E-C-R-E-T

ATTACHMENT(S) ~~NOT~~  
MICROFILMED

STATE	X ARMY	X NAVY	X AIR	X FBI	AEC	ORR Ev	X
-------	--------	--------	-------	-------	-----	--------	---

(Note: Washington distribution indicated by "X"; Field distribution by "#".)

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

**ТРУДЫ**  
**МОСКОВСКОГО ИНСТИТУТА**  
**ИНЖЕНЕРОВ ГЕОДЕЗИИ**  
**АЭРОФОТОСЪЕМКИ**  
**И КАРТОГРАФИИ**

ВЫПУСК

**25**

ГЕОДЕЗИЗДАТ  
1957

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР  
МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ГЕОДЕЗИИ, АЭРОФОТОСЪЕМКИ  
И КАРТОГРАФИИ

# ТРУДЫ

МОСКОВСКОГО ИНСТИТУТА ИНЖЕНЕРОВ ГЕОДЕЗИИ,  
АЭРОФОТОСЪЕМКИ и КАРТОГРАФИИ

ВЫПУСК 25

## ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	По вине
37	4 снизу	$= \sqrt{\frac{s^2}{12} n(n+2)(n+1)}.$	$= \frac{s^2}{12} n(n+2)(n+1).$	Авт.
40	3 сверху	$a_i = \frac{\sqrt{ci(n-i+1)}}{(n+1)(n+2)}$	$a_i = \frac{6i(n-i+1)}{(n+1)(n+2)}$	Ред.

Труды МИИГАиК, вып. 25.

Издательство геодезической литературы  
МОСКВА \* 1957

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Дробышев Ф. В. О введении в фототрансформаторах дополнительных де- центраций негатива . . . . .	3
Авгевич В. И. Фотопротрактор . . . . .	11
Селиханович В. Г. Учет ошибок исходных данных в полигонометрии . .	23
Козлов В. П. О совместном уравнивании нивелирных сетей различных классов . . . . .	43
Башлавиц Л. А. Новый метод нивелирования III класса . . . . .	51
Блудова И. М. Об изменении ошибки в заданном направлении . . . . .	61
Белова Н. А. О применении принципа несвободного плавания для нивелиро- вания астрономических инструментов . . . . .	67
Черданцев Г. Н. Типы социальных карт СССР . . . . .	77

Редактор А. И. Мазмишвили  
Редактор изд-ва Л. М. Комарькова

Техн. редактор В. В. Романова  
Корректор А. И. Смирнова

Т-00689 Сдано в набор 29/VIII 1956 г. Подп. к печати 4/I 1957 г.  
Формат бум. 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бум. л. 2,6 Печ. л. 5,25. Усл.-печ. л. 7,2. Уч.-изд. л. 4,6.  
Колич. зн. в п. л. 35 000. Зак. № 544. Тираж 1300 экз. Цена 3 р. 20к. + переплет 1 р.

Рижская картфабрика, Алтонавас, 43.

ТРУДЫ МОСКОВСКОГО ИНСТИТУТА ИНЖЕНЕРОВ ГЕОДЕЗИИ,  
АЭРОФОТОСЪЕМКИ И КАРТОГРАФИИ

Выпуск 25

1957 г.

Кафедра фотограмметрии

Профессор доктор техн. наук Ф. В. Дробышев

**О ВВЕДЕНИИ В ФОТОТРАНСФОРМАТОРАХ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ  
ДЕЦЕНТРАЦИЙ НЕГАТИВА**

Общие положения. При трансформировании аэроснимков на фототрансформаторах соблюдают геометрические и оптические условия. Так, например, при работе на большом фототрансформаторе, помимо введения трансформационных углов и соблюдения условий сопряжения, потребуется еще введение децентрации негатива для смещения его вдоль

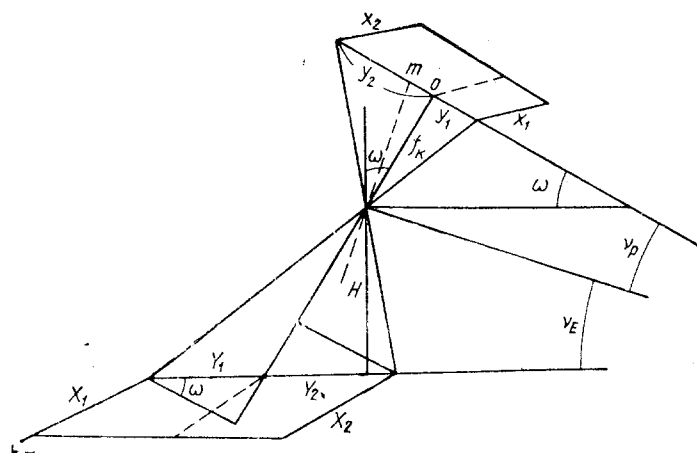


Рис. 1

главной вертикали в такое положение, при котором главная точка негатива (рис. 1) расположится от точки главной оптической оси на расстоянии

$$mo = \frac{f_k}{\sin \alpha_0} \left( \frac{\cos \nu_E}{\cos \nu_P} - \cos \alpha_0 \right),$$

которое для увеличения проекции  $1\times$  имеет вид

$$mo = \frac{f_k}{\sin \alpha_0} (1 - \cos \alpha_0)^*. \quad (1)$$

В этом случае при плоской местности точки аэроснимков и соответствующие им точки планшетки (выкопировки с планшета) совпадут.

В статье рассматриваются деформации изображения, которые произойдут при введении поперечных и продольных децентраций за счет нарушения строгих условий трансформирования.

\* Далее считаем наклон главной вертикали равным  $\omega$ .

Этот вопрос с различных точек зрения рассматривался авторами: Лебедевым, Г. В. Романовским (в журнале «Геодезист» еще до 1941 г.) — в отношении трансформирования аэроснимков горной местности, В. А. Бородиным (в сборнике статей ГУГК, вып. XXXI, 1950) — в отношении создания картографических проекций и шрифтов. Следует отметить работу В. А. Бородина в научно-техническом отчете ЦНИИГАиК за 1951 г. «Совершенствование технологии составления и подготовки карт к изданию» и научно-технический отчет профессора Н. А. Урмаева за 1954 г. (в ЦНИИГАиК) на тему «Теория преобразования картографических проекций».

Автор исследует вопрос с фотограмметрической стороны на основе существующих формул связи координат аэроснимка и местности. Это имеет значение как для определения точности трансформирования, так и для определения возможностей (диапазонов) новых видов трансформирования для фотограмметрических и картографических целей.

Обратимся сначала к вопросу трансформирования I рода (строгие связи), а затем II рода (преобразованные связи). Оба вида трансформирования можно осуществить на большом фототрансформаторе (ФТБ) — типичном фототрансформаторе II рода.

Дополнительные децентрации негатива вдоль главной горизонтали. Осветим чертеж прямоугольника, уложенного на экран фототрансформатора, и проэкспонируем его изображение на негативную пластинку, расположенную в кассете. Он изобразится в виде трапеции. Если полученный негатив спроектировать на экран, то получим снова прямоугольник.

Смещение негатива вдоль направления  $x_1$  или параллельного ему направления  $x_2$  вызовет деформацию изображения вдоль осей  $X_1$  и  $X_2$ , но длины смещенных отрезков  $Y_1$  и  $Y_2$  сохранятся, т. е. в результате получится ромб.

Для установления размеров искажения фигуры установим координатную связь исходного прямоугольника с его изображением (см. рис. 1), а для выводов из-за симметрии частей прямоугольника возьмем только его половину.

Напишем

$$\frac{y_1}{Y_1 \cos \omega} = \frac{f_k}{\frac{H}{\cos \omega} + Y_1 \sin \omega}, \quad (2)$$

$$\frac{y_2}{Y_2 \cos \omega} = \frac{f_k}{\frac{H}{\cos \omega} - Y_2 \sin \omega}, \quad (3)$$

$$\frac{x_1}{X_1} = \frac{f_k}{\frac{H}{\cos \omega} + Y_1 \sin \omega}, \quad (4)$$

$$\frac{x_2}{X_2} = \frac{f_k}{\frac{H}{\cos \omega} - Y_2 \sin \omega}. \quad (5)$$

При введении децентрации  $\Delta x$  негатива, например по направлению стрелки, получим уравнения

$$\frac{y_1}{Y_1 \cos \omega} = \frac{f_k}{\frac{H}{\cos \omega} + Y_1 \sin \omega}, \quad (6)$$

$$\frac{y_2}{Y_2 \cos \omega} = \frac{f_k}{\frac{H}{\cos \omega} - Y_2 \sin \omega}, \quad (7)$$

$$\frac{x_1 + \Delta x}{X_1'} = \frac{f_k}{\frac{H}{\cos \omega} + Y_1 \sin \omega}, \quad (8)$$

$$\frac{x_2 + \Delta x}{X_2'} = \frac{f_k}{\frac{H}{\cos \omega} + Y_2 \sin \omega}. \quad (9)$$

Точка  $O$  сместится на величину  $\Delta X$ , определяемую из уравнения

$$\frac{\Delta X}{\Delta x} = \frac{OS}{f_k}$$

или

$$\Delta X = \frac{\Delta x \cdot H}{f_k \cdot \cos \omega}. \quad (10)$$

Новые координаты  $X_1'$  и  $X_2'$  показывают размер искажения фигуры. Приравняв уравнения (4) и (8), (5) и (9), получим

$$\frac{x_1}{X_1} = \frac{x_1 + \Delta x}{X_1'},$$

$$\frac{x_2}{X_2} = \frac{x_2 + \Delta x}{X_2'}.$$

Отсюда найдем

$$X_1' = \frac{x_1 + \Delta x}{x_1} X_1, \quad (10')$$

$$X_2' = \frac{x_2 + \Delta x}{x_2} X_2. \quad (11)$$

Угол наклона боковой линии изображения определяют из формулы

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{X_1' - X_2'}{Y_1 + Y_2}. \quad (12)$$

При этом для формулы квадрата, когда  $X_1 = X_2 = 2Y_1 = 2Y_2 = X = 2Y$ , получим

$$\operatorname{tg} \gamma = \Delta x \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}. \quad (13)$$

Так как равным отрезкам вдоль линий  $x_1$  и  $x_2$ , параллельных главной горизонтали аэроснимка, на экране соответствуют равные отрезки, то вместо прямоугольника (или квадрата) получим ромбы.

Приведем формулу (13) в более удобный вид, для чего подставим в нее значения  $x_1$  и  $x_2$  из формул (4) и (5). Так как для квадрата  $X_1 = X_2 = 2Y_1 = 2Y_2$ , то при  $H = f_k = F^*$  получим:

$$\operatorname{tg} \gamma = \Delta x \frac{X_1 F \left( \frac{F}{\cos \omega} + Y_1 \sin \omega \right) - X_1 F \left( \frac{F}{\cos \omega} - Y_1 \sin \omega \right)}{X_1^2 F^2},$$

или

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta x}{F} \sin \omega. \quad (14)$$

\* Обозначение  $F$  понадобится далее.

По этой формуле можно решить ряд фотограмметрических и картографических задач.

I. Аэроснимок имеет наклон  $5^\circ$ ;  $f_k = 100$  мм. При проектировании аэроснимка (в проекторе, в мультиплексе) по методу I рода (т. е. строгой связки) на экране восстановится план местности, предположим, в виде квадрата.

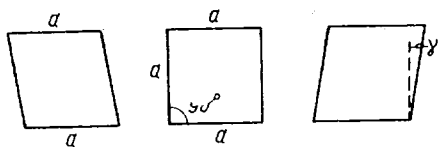


Рис. 2

При дополнительной поперечной децентрации негатива на  $\Delta x = 30$  мм получим поворот сторон согласно формуле (14) на угол  $\gamma = 1^\circ 30'$ .

На рис. 2 представлены исходный квадрат и ромб, полученный после введения дополнительной децентрации влево или вправо на 30 мм.

Таким образом, случайный наклон аэроснимка до  $5^\circ$  открывает возможность не только его трансформирования, но и «ромбического» деформирования. Более наглядно такое деформирование видно при сжатии или растяжении фигуры. Это может оказаться необходимым при трансформировании аэроснимков равномерно наклонной местности.

II. Микродецентрация в стереофотограмметрии. Положим, что аэроснимок, имеющий наклон, входит в состав стереопары и точность составляющей параллакса принята равной  $\pm 0,01$  мм. Тогда при координате  $x$  ( $y$ ) в 80 мм допускаемые угловые ошибки не должны превосходить

$$\gamma = \frac{0,01}{80}.$$

Подставляя  $\gamma$  в формулу (14), получим допуск для децентрации

$$\Delta x = \frac{F \cdot \gamma}{\omega}. \quad (15)$$

При  $\omega = 3^\circ$  и  $F = 100$  мм

$$\Delta x = 0,25 \text{ мм.}$$

III. Создание картографических проекций и наклонных шрифтов из квадратной (или прямоугольной) формы.

а) Применим фототрансформатор ФТБ, проектирующий по методу II рода. Пусть угол наклона квадрата равен  $\omega$ . Тогда, имея в виду, что при увеличении  $1\times$  значение  $a = 2f'$  (рис. 3), получим

$$F = 2f' \cos \frac{\omega}{2}. \quad (16)$$

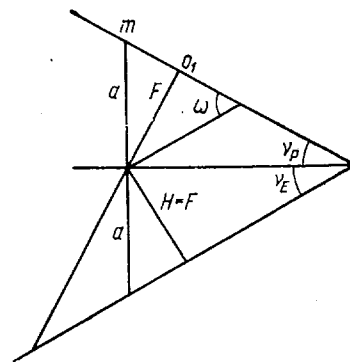


Рис. 3

Так как в большом фототрансформаторе находится объектив «Луч» с  $f' = 180$  мм, а угол  $\omega$  можно взять не более  $40^\circ$ , то получим нормальную децентрацию (первоначальная установка аэроснимка по методу I рода)

$$m o_1 = 360 \cdot \sin 20^\circ = 119,12 \text{ мм}$$

и

$$F = 360 \cdot \cos 20^\circ = 338,4 \text{ мм.}$$

При введении дополнительной децентрации, например  $\Delta = 60$  мм, согласно формуле (14) найдем



$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{60 \cdot \sin 40^\circ}{338,4} = 0,12,$$

откуда следует, что наклон  $\gamma$  сторон квадрата станет равным

$$\gamma = 6^\circ 50'.$$

б) Применим короткофокусную установку. Для увеличения  $1\times$  и формата изображения  $180 \times 180$  мм можно применить объектив  $f' = 100$  мм с углом до  $60-70^\circ$  (по диагонали изображения). В этом случае взаимный угол между сопряженными плоскостями негатива и экрана можно довести до  $80^\circ$ , а децентрацию для объекта размером  $90 \times 90$  мм — до 40 мм.

Тогда по формуле (16) получим значение  $F = 200 \cdot \cos 40^\circ = 153,2$ . Поэтому наклон  $\gamma$  боковой стороны изображения согласно формуле (14) будет равен

$$\gamma = 14^\circ 30',$$

т. е. он может быть большим, чем в предыдущем примере.

Из сопоставления примеров III а и б видно, что для целей получения максимальной деформации изображения надо применять широкоугольный объектив порядка  $60-70^\circ$ , что обеспечит хорошую фотопечать на экране. Размеры фототрансформатора при этом будут небольшими.

Дополнительные децентрации аэроснимка, вводимые вдоль его главной вертикали. При введении децентрации  $\Delta y$  формулы (2), (3), (4), (5) получают вид:

$$\frac{y_1 + \Delta y}{Y_1' \cos \omega} = \frac{f_k}{\frac{H}{\cos \omega} + Y_1' \sin \omega}, \quad (17)$$

$$\frac{y_2 - \Delta y}{Y_2' \cos \omega} = \frac{f_k}{\frac{H}{\cos \omega} - Y_2' \sin \omega}, \quad (18)$$

$$\frac{x_1}{X_1'} = \frac{f_k}{\frac{H}{\cos \omega} + Y_1' \sin \omega}, \quad (19)$$

$$\frac{x_2}{X_2'} = \frac{f_k}{\frac{H}{\cos \omega} - Y_2' \sin \omega}. \quad (20)$$

Из этих формул можно написать

$$\frac{y_1 + \Delta y}{Y_1' \cos \omega} = \frac{x_1}{X_1'} \quad (21)$$

и

$$\frac{y_2 - \Delta y}{Y_2' \cos \omega} = \frac{x_2}{X_2'}. \quad (22)$$

Желая сохранить неизменными координаты  $X$ , т. е.  $X_1' = X_2' = X$ , необходимо сначала определить по формулам (17) и (18) значения  $Y_1'$  и  $Y_2'$

$$Y_1' = \frac{H(y_1 + \Delta y)}{\cos \omega [f \cos \omega - (y_1 + \Delta y) \sin \omega]}, \quad (23)$$

$$Y_2' = \frac{H(y_2 - \Delta y)}{\cos \omega [f \cos \omega + (y_2 - \Delta y) \sin \omega]}. \quad (24)$$

Кроме того, по уравнениям (19) и (20) имеем

$$X_1' = \frac{H_1 x_1}{f_k \cos \omega - (y_1 + \Delta y) \sin \omega}, \quad (25)$$

$$X_2' = \frac{H_1 x_2}{f_k \cos \omega + (y_2 - \Delta y) \sin \omega}. \quad (26)$$

Сравнивая  $X_1' = X_2'$ , следует изменить значение  $\omega$ , чтобы получить

$$\frac{H_1 x_1}{f_k \cos \omega_1 - (y_1 + \Delta y) \sin \omega_1} = \frac{H_1 x_2}{f_k \cos \omega_1 + (y_2 - \Delta y) \sin \omega_1} = X$$

или

$$\frac{x_1}{f_k \cos \omega_1 - (y_1 + \Delta y) \sin \omega_1} = \frac{x_2}{f_k \cos \omega_1 + (y_2 - \Delta y) \sin \omega_1},$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{f_k - (y_1 + \Delta y) \operatorname{tg} \omega_1}{f_k + (y_2 - \Delta y) \operatorname{tg} \omega_1},$$

откуда имеем

$$\operatorname{tg} \omega_1 = \frac{f_k (x_2 - x_1)}{[x_1 (y_2 - \Delta y) + x_2 (y_1 + \Delta y)]}. \quad (27)$$

Теперь из формул (23) и (24), заменяя  $H = f_k$ , получим

$$Y_1'' = \frac{f_k (y_1 + \Delta y)}{\cos \omega_1 [f_k \cos \omega_1 - (y_1 + \Delta y) \sin \omega_1]}, \quad (28)$$

$$Y_2'' = \frac{f_k (y_2 - \Delta y)}{\cos \omega_1 [f_k \cos \omega_1 + (y_2 - \Delta y) \sin \omega_1]}. \quad (29)$$

Таким образом, квадрат  $2X \times 2Y$  после проектирования стал прямоугольником размером

$$2X \cdot (Y_1'' + Y_2''). \quad (30)$$

Следовательно, вычислять прямоугольник надо по формулам (27), (28) и (29).

Пример:  $f_k = 100$  мм;  $X = 50$  мм =  $Y$ ;  $\omega = 5^\circ$ ; децентрация  $\Delta y = 30$  мм. Новое значение угла  $\omega_1$  равно  $4^\circ 50'$ .

Новые значения  $X_1''$  и  $X_2''$  можно подсчитать по формулам типа (25) и (26)

$$X_1'' = \frac{H x_1}{f_k \cos \omega_1 - (y_1 + \Delta y) \sin \omega_1} \quad (31)$$

или

$$X_2'' = \frac{H x_2}{f_k \cos \omega_1 + (y_2 - \Delta y) \sin \omega_1}. \quad (32)$$

Подсчеты показывают, что при введении дополнительной децентрации  $\Delta y = 30$  мм и новом угле наклона  $\omega_1 = 4^\circ 50'$  происходит превращение квадрата в растянутый (или сжатый) прямоугольник со сторонами  $X$ , увеличенными на  $\sim 1,3$  мм (для  $X = 50$  мм).

Поэтому необходимо вместо  $H$  взять новое значение, определяемое из уравнения

$$X H = X_1'' H_1, \quad (33)$$

откуда

$$H_1 = \frac{X}{X_1''} H,$$

где

$$\frac{X}{X''} = K. \quad (34)$$

В данном случае коэффициент  $K$  равен

$$K = \frac{50}{51,3} = 0,97.$$

Новое значение высоты  $H_1$  равно

$$H_1 = 0,97 \cdot 100 = 97 \text{ мм.}$$

Определим удлинение фигуры. Согласно уравнениям типа (23) и (24)

$$Y_1'' = \frac{H_1(y_1 + \Delta y)}{\cos \omega_1 [f \cos \omega_1 - (y_1 + \Delta y) \sin \omega_1]}, \quad (35)$$

$$Y_2'' = \frac{H_1(y_2 - \Delta y)}{\cos \omega_1 [f \cos \omega_1 + (y_2 - \Delta y) \sin \omega_1]}. \quad (36)$$

Новая фигура на экране имеет вид прямоугольника  $100 \times 102,19 \text{ мм}$

На рис. 4 показан исходный квадрат и его преобразования в различные прямоугольники.

Таким образом, преобразование квадрата в прямоугольник без изменения длин их оснований решается путем трех движений: дополнительной децентрацией, изменением угла наклона снимка и изменением высоты центра проектирования.

Исследование показало, что даже в случае угла наклона аэроснимка до  $5^\circ$  уже возможно заметное вытягивание квадрата  $100 \times 100 \text{ мм}$  на  $2,19 \text{ мм}$  (при  $\Delta y = 30 \text{ мм}$ ). Большие наклоны кассеты фототрансформатора при двойном трансформировании дадут сжатия большего размера. Здесь остается в силе предложение об использовании широкоугольных объективов.

При трансформировании на большом фототрансформаторе (II рода) углы  $\omega$  и  $\omega_1$  приобретут гораздо большее значение, при этом децентрацию  $\Delta y$  следует брать дополнительной по отношению к обычной децентрации, определяемой по формуле (1).

Более сложные искажения фигур получатся при суммарном действии обоих видов децентраций. Рассмотрение их имеет большое значение для целей взаимного преобразования картографических проекций.

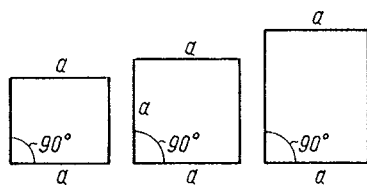


Рис. 4

ТРУДЫ МОСКОВСКОГО ИНСТИТУТА ИНЖЕНЕРОВ ГЕОДЕЗИИ,  
АЭРОФОТОСЪЕМКИ И КАРТОГРАФИИ

Выпуск 25

1957 г.

Кафедра прикладной геодезии

Доцент кандидат техн. наук В. И. Авгевич

### ФОТОПРОТРАКТОР

В МИИГАиК закончено изготовление и исследование нового фотограмметрического прибора, получившего название фотопротрактор. В отличие от обычного протрактора — прибора, широко применяемого гидрографами для решения на плане обратной засечки графо-механическим путем лишь по трем направлениям, фотопротрактор решает эту же задачу по любому практически возможному числу направлений; при этом само решение выполняется оптико-механическим путем. Эскизная компоновка фотопротрактора и разработка технических условий на проектирование выполнены автором при участии доц. М. С. Муравьева. Рабочие чертежи изготовлены конструктором инженером В. Н. Прядиловым. Первая модель прибора, как показали лабораторные исследования и опытно-производственная работа, сделанные в 1954 г., оказалась недостаточно удовлетворительной.

Весной 1955 г. учебно-производственная мастерская МИИГАиК изготовила опытный образец второй модели прибора, вполне удовлетворяющий своему назначению.

Цель изготовления прибора — дальнейшее повышение точности обработки обратных фотограмметрических засечек, выполняемых в порядке геодезической привязки промера глубин эхолотом\*. Достигается оно за счет отказа от проведения восстанавливаемых направлений вручную, как это делается при изготовлении лучевых восковок, используемых для решения фотозасечек графическим путем.

Новый прибор позволяет камерально восстанавливать связку проектирующих лучей, существовавшую в момент фотографирования. При этом восстанавливается не весь пучок, а лишь веер лучей, непосредственно определяющих пространственное положение фотоаппарата в момент съемки. Для этого за объект обратной проекции принимается не подлинный негатив, а матрица абсцисс.

Матрица абсцисс (рис. 1) представляет собой строчку пуансонных проколов в черной пленке и является точной геометрической копией только той части негатива, которая должна использоваться для решения обратной фотограмметрической засечки. Матрицы абсцисс изготавливаются в процессе дешифрирования негативов фотозасечек на фотограмметрическом приборе — прецизионном светопульте\*\*.

В комплект фотопротрактора (рис. 2) входят: проектор 1, рабочий стол 4, 25 фиксирующих экранов 3 и 4, десять грузиков с игольчатыми шипами, а также два трансформатора на 220/127 в для общего электропитания и на 127/13,5 в — для питания миниатюрных электролампочек.

\* См. статью доц. В. И. Авгевича в Трудах МИИГАиК (вып. 19, 1954).

\*\* См. статью доц. В. И. Авгевича в Трудах МИИГАиК (вып. 26, 1957).

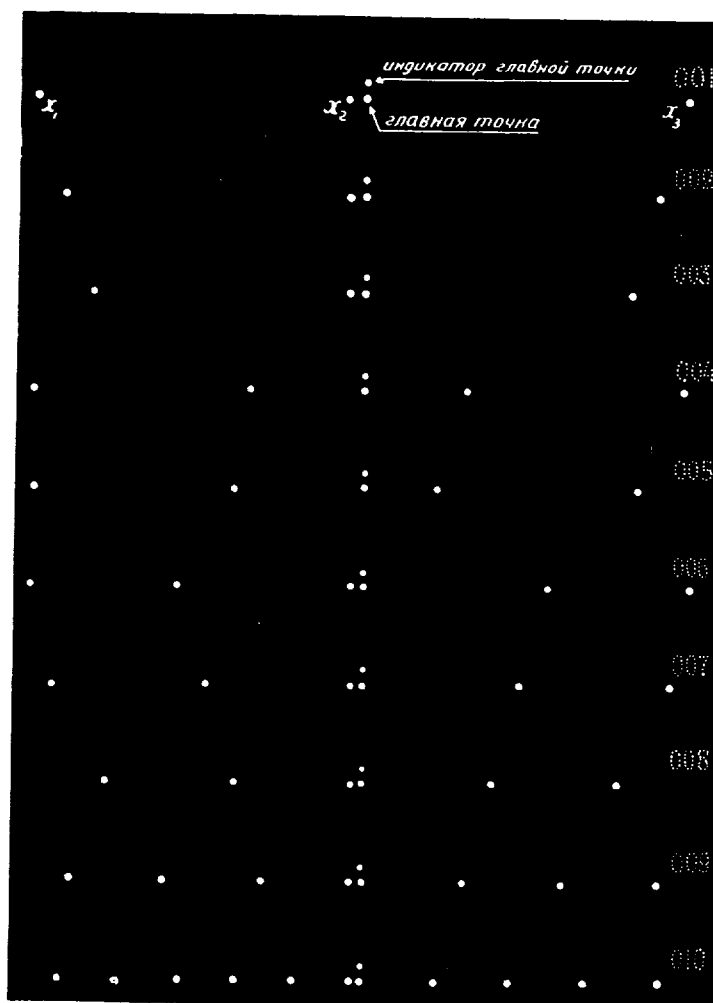


Рис. 1. Макет матрицы для решения фотозасечек  
(уменьшено в 2 раза)

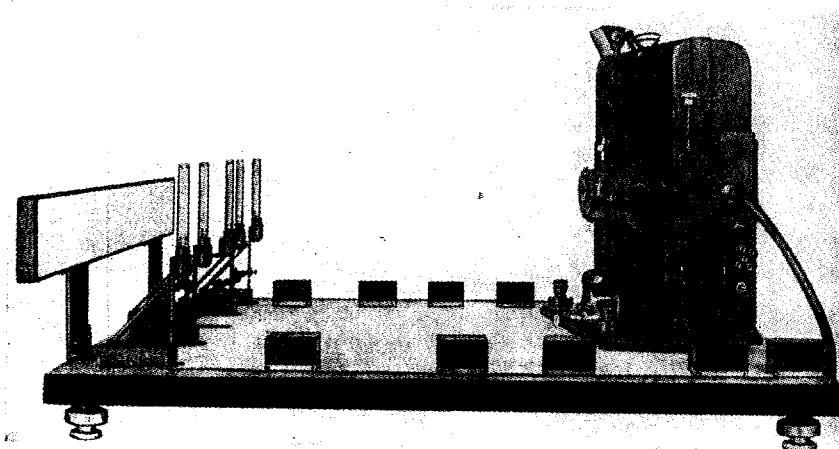


Рис. 2. Рабочий комплект фотопротрактора

### Тактико-технические данные фотопротрактора

Электропитание: непосредственно от сети с напряжением 100 и 127 в, а при напряжении 220 в — через дополнительный трансформатор 220/127 в. Рабочее напряжение лампочек подсвета 13,5 в получается с помощью специального трансформатора, постоянно включенного в электросхему прибора.

Максимальная потребляемая мощность: 150 вт.

Диапазон отстояний проектирующего отверстия от матрицы абсцисс: от 95 до 115 мм.

Диаметры проектирующих отверстий: от 0,2 до 1,0 мм через 0,2 мм.

Точность отсчетов по шкалам:  $\pm 0,05$  мм.

Сходимость устанавливаемых отстояний центра проекции с  $f$  фотоаппарата 0,10—0,15 мм.

Максимально возможное число восстанавливаемых лучей: 7 (при под свете миниатюрными лампочками) и любое возможное число при под свете с помощью специального рефлектора.

Число решаемых фотозасечек при одной зарядке матричной пленкой: до 200 засечек.

Длительность полного цикла решения одной засечкой: 3—4 мин.

Диапазон возможных отстояний центра проекции от линии расстановки экранов: в пределах полного листа чертежной бумаги.

Габариты проектора: 270×380×415 мм.

Вес проектора: 15 кг.

Габариты рабочего стола: 120×690×930 мм.

Вес рабочего стола: 18 кг.

Общий вес комплекта, уложенного в четыре ящика: 95 кг.

Фотопротрактор — это высокоточный подвижной горизонтальный проектор, устроенный по принципу камеры-обскуры. Отсутствие оптической проецирующей системы избавляет от необходимости фокусирования, вызывающего нарушение подобия связей восстанавливаемых лучей связкам, существовавшим при съемке.

Прибор покоится на трех цилиндрических колонках, на торцах которых поставлены обоймы упорного подшипника, составленного из девяти шариков. Подшипники придают прибору подвижность, а распределение веса прибора на 27 точек опоры создает минимальное давление на рабочий стол в каждой точке касания. Легкость, с какой прибор можно перемещать по рабочему столу, позволяет оперировать с восстановленным пучком лучей так же, как это обычно делают при решении обратной засечки графически по способу Болотова.

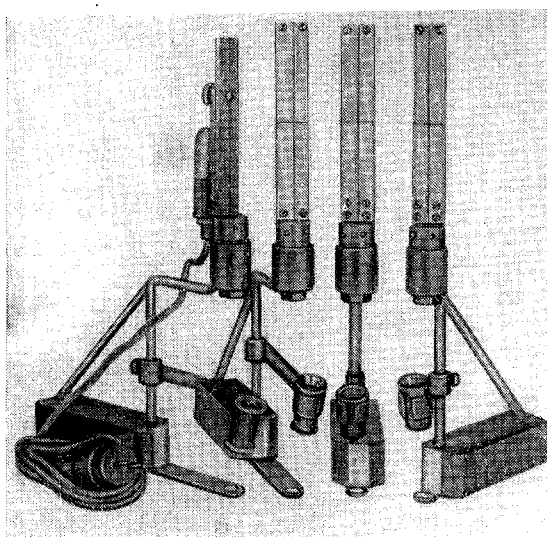


Рис. 3. Экраны фотопротрактора

Проектирование восстановленного пучка лучей осуществляется раз-

дельно для каждого луча на специальные фиксирующие экраны (рис. 3). Эти экраны оптически центрируются на промерном планшете над наколами точек геодезического обоснования, после чего вертикальная нить, награвированная на рабочей поверхности каждого экрана, оказывается проходящей точно через накол опорной точки. Ускорение наведения лучей на экраны достигается с помощью дополнительного фонового экрана (см. рис. 2).

Для достижения наилучшей освещенности фиксирующих экранов в пределах кружка, образуемого восстановленным лучом, изменяющейся в зависимости от длины луча, в фотопротракторе предусмотрена воз-

можность использования различных размеров проектирующего отверстия. С этой целью на торцевой части конуса проектора поставлена диафрагма с набором отверстий диаметром 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 и 1,0 мм (рис. 4).

Ориентирование плоского пучка восстановленных лучей считается выполненным тогда, когда каждый луч «бьет» на вертикаль соответствующего ему фиксирующего экрана и создаваемый лучом на экране светлый кружок рассекается вертикальной нитью фиксирующего экрана пополам. Положение вершины восстановленного и ориентированного пучков лучей, совпадающей с центром проекции—точечным отверстием

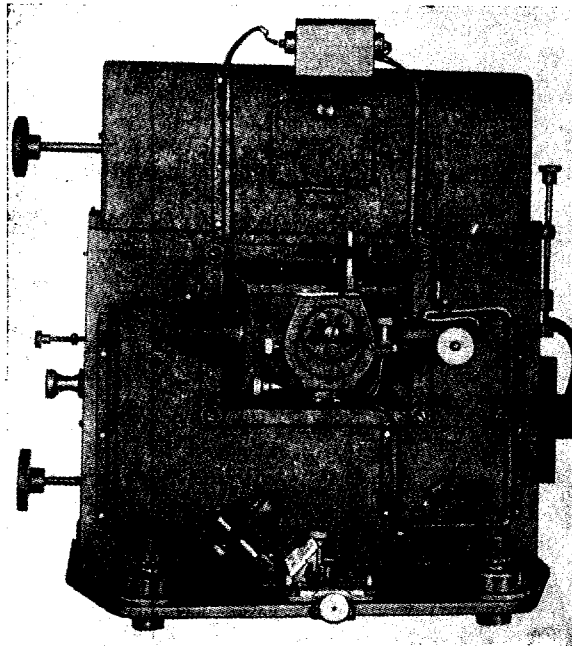


Рис. 4. Фотопротрактор (вид спереди)

в диафрагме фотопротрактора, фиксируется на промерном плане при помощи пружинящей иглы. Эта игла располагается на одной вертикали с центром проекции и для выверки ее положения снабжена юстировочным устройством. Как фиксаторная игла, так и точечное отверстие в диафрагме прибора устанавливаются относительно плоскости матрицы абсцисс на расстоянии, равном фокусному расстоянию фотоаппарата, применявшегося при съемке. Для установки иглы и диафрагмы на величину  $f$  оба этих элемента прибора имеют шкалы с конусами, обеспечивающими точность установки  $f$  в 0,05 мм.

Внутри корпуса проектора, между тубусом и матрицей, помещена система из трех подвижных плоскостей, связанная с прикладной рамкой. С помощью этой системы осуществляется точное ориентирование каждой строчки абсцисс относительно координатных осей прибора. При этом движение матрицы может происходить вдоль осей  $X$  и  $Z$ , а также и в своей плоскости на угол  $\alpha$ . Для точного ориентирования матриц применяется сетка Готье, вмонтированная в съемную рамку, имеющую фиксированную посадку на свое рабочее место. После ориентирования матрицы сетка Готье снимается, а прижим матричной пленки к прикладной рамке производится разрезным прижимным стеклом, смонтированным

на раме осветительного устройства. Проколы в матрице подсвечиваются передвижными миниатюрными лампочками мощностью 4 вт. Каждая лампочка имеет три степени свободы, что позволяет, регулируя их положение рукоятками, выведенными на заднюю стенку проектора, приводить тело накала в наилучшее положение относительно прокола в матрице.

Чтобы избежать работы на приборе в темноте, когда возможны произвольные смещения фиксирующих экранов, предусмотрена небольшая рампа зеленого света. Эта рампа установлена над передней стенкой прибора и освещает все пространство между проектором и фронтом расположения фиксирующих экранов.

Как и любой прибор, фотопротрактор имеет ряд источников погрешностей, так или иначе влияющих на точность решения обратной фотogramметрической засечки. Главная погрешность в решении фотозасечки возникает в результате нарушения тождества между определяющими углами в натуре и углами, используемыми при решении засечки. Возможность нарушения этого тождества обуславливается влиянием следующих факторов:

- а) случайный наклон главного луча фотокамеры в момент фотографирования;
- б) наведение главного луча фотокамеры не на линию видимого горизонта, а на линию уреза воды;
- в) дополнительный наклон плоскости, в которой лежит центр проектирования и главная горизонталь снимка, возникающий при решении задачи на фотопротракторе;
- г) недостаточная тщательность в установке проектирующего отверстия в диафрагме на величину фокусного расстояния объектива, которым велась съемка;
- д) возможная неперпендикулярность главного луча фотопротрактора к плоскости прикладной рамки;
- е) отклонение острия иглы пунсона от положения на одной вертикали с центром проектирующего отверстия в диафрагме;
- ж) восстановление фотопротрактором углов, уже получивших искажения из-за дисторсии объектива;
- з) неточное прохождение вертикальной нити на фиксирующих экранах через наколы опорных точек на промерном планшете.

Из всех перечисленных факторов лишь последние семь непосредственно связаны с фотопротрактором. Первые же два фактора вообще присущи методу фотозасечек, равно как влияние поперечного крена, деформации пленки, разнорысотности в расположении опорных точек в натуре и т. п., удельный вес которых был выяснен ранее\*.

Опуская исследование степени влияния перечисленных факторов, детально описанное в научно-техническом отчете по теме № 40-бис, хранящемся в Научно-исследовательском секторе МИИГАиК, приведем лишь конечные результаты этого исследования, необходимые для расчета ошибки, вызывающей нарушение тождества пучков лучей.

Так, ошибка  $\Delta\beta_s$ , возникающая из-за неперпендикулярности главного луча фотопротрактора к плоскости прикладной рамки для одного определяющего угла, составляет  $\pm 2'$ , а для пучка из трех лучей она равна  $\pm 2',8$ . Но эта ошибка предельная. Переходя же к средним квадратическим ошибкам, для одного пучка получим

$$m_s = \pm 0',9.$$

\* См. статью доц. В. И. Авгеевича в Трудах МИИГАиК (вып. 19, 1954).



Ошибка  $\Delta\beta_j$ , вызываемая неточностью в установке центра проектирующего отверстия при отстоянии от главной точки прикладной рамки, равном фокусному расстоянию фотосъемочной камеры, как показали расчеты, равна  $\pm 0',2$  для одного определяющего угла и  $\pm 0',3$  — для пучка из трех лучей. Отсюда имеем

$$m_j = \pm 0',1.$$

Ошибка  $\Delta\beta_p$  из-за несовпадения острия иглы пуансона с вертикалью центра проекции, будучи приравнена к ошибке в определяющем угле, по своей величине равна ошибке в положении вертикали фиксирующего экрана, которая в среднем для пучка из трех лучей составляет  $\pm 3',7$ . В связи с этим получим

$$m_p = \pm 1',2.$$

Ошибка  $\Delta\beta_d$ , вызванная дисторсией объектива для пучка из трех лучей, составляет  $\pm 0',8$ , откуда имеем

$$m_d = \pm 0',3.$$

Ошибка  $\Delta\beta_k$ , вызванная неточной центровкой проколов абсцисс над матрицей компостера, достигает  $\pm 1',0$  для пучка из трех лучей. Поэтому находим

$$m_k = \pm 0',3.$$

И, наконец, ошибка  $\Delta\beta_s$  из-за неправильной установки вертикалей фиксирующих экранов над наколами опорных точек достигает  $\pm 3',7$  для пучка из трех лучей. Отсюда следует, что

$$m_s = \pm 1',2.$$

Средняя квадратическая ошибка полного угла обратной фотограмметрической засечки, образованного двумя определяющими углами  $\beta$ , обусловленная совместным влиянием всех перечисленных выше факторов, составляет

$$m_{2\beta} = \pm \sqrt{(0,9)^2 + (0,1)^2 + (1,2)^2 + (0,3)^2 + (0,3)^2 + (1,2)^2},$$

откуда имеем

$$m_{2\beta} = \pm 2'.$$

Подсчитанную ошибку целесообразно сравнить с ошибкой лучевого графика. Как было установлено в процессе опытной работы 1952 г., средняя квадратическая ошибка одного направления, подсчитанная с учетом ошибок построения лучевого графика, составила  $\pm 2',1$ , а для пучка из трех лучей  $\pm 3',6$ . Сравнивая ее с ошибкой  $m_{2\beta}$ , подсчитанной для фотопротрактора, можно установить почти двукратное повышение точности восстановления пучка лучей.

Если средняя ошибка определения планового положения промерных вертикалей, свойственная способу мензульных засечек, составляет  $\pm 2,7$  мм на плане масштаба 1:5000, то для способа фотозасечек она снижается: до 0,8 мм при обработке фотозасечек без использования новых фотограмметрических приборов, предложенных автором; до 0,5 мм при обработке негативов с помощью одного лишь прецизионного светопульта и до 0,3 мм при решении фотозасечек с помощью фотопротрактора.

Условия производственной эксплуатации прибора достаточно просты и, как обычно, предусматривают выполнение ряда проверок, предшествующих использованию фотопротрактора по назначению. В процессе проверок устанавливается выполнение следующих требований.

1. Рабочий стол комплекта фотопротрактора должен иметь ровную поверхность, которая может служить горизонтальной плоскостью. Поверка качества поверхности рабочего стола осуществляется путем прикладывания к ней скошенного ребра линейки Дробышева по разным направлениям. Допустимый просвет не должен превышать 0,1 мм. Горизонтирование стола достигается при помощи накладного цилиндрического уровня с ценой деления 1'.

2. Вертикальные оси фиксирующих экранов должны проходить через крест нитей установочного стекла, имеющегося при основании экранов, и допустимое отклонение верхней точки вертикали от правильного положения не должно превышать 0,1 мм. Для проверки используют теодолит с накладным уровнем при трубе, устанавливаемый в 3—4 м от испытательного стенда. На рабочую поверхность стола кладут лист бумаги и закрепляют грузиками с шипами. Самые тонкие швейные иглы ставят в створе на расстоянии 100 мм одна от другой, используя для этой цели теодолит. Затем, сняв первую иглу, ставят над наколом поверяемый фиксирующий экран так, чтобы крест рисок на установочном стекле расположился точно над ним. Одновременно плоскость фиксирующего экрана располагают перпендикулярно к направлению визирного луча теодолита. Затем в 10—12 см слева и справа от поверяемого экрана ставят два других экрана этого же типа, располагая их рабочие поверхности под углом 90° к поверхности поверяемого экрана. На их верхние обрезы кладут счетную линейку так, чтобы ее скошенное ребро с имеющейся на нем шкалой было направлено в сторону теодолита. После этого, наблюдая в теодолит, лимб которого закреплен, а вертикальная нить уже наведена на то место, где стояла игла, определяют совпадение вертикали, награвированной на поверхности фиксирующего экрана с вертикальной нитью теодолита. Если нужного совпадения нет, то по линейке, положенной на торцы боковых экранов, делают два отсчета: по месту ее пересечения нитью теодолита и по верхнему концу вертикали фиксирующего экрана. Разность этих двух отсчетов дает величину крена вертикальной нити экрана в ту или иную сторону. Затем поверяемый фиксирующий экран разворачивают вокруг накола на 90° и таким же путем поверяют вертикальность самой рабочей поверхности экрана. В случае ее наклона берут два отсчета по линейке и по разности отсчетов находят величину наклона экрана вперед или назад; при этом десятые доли миллиметра по линейке определяют на глаз.

В случае обнаруживания крена или наклона вертикали фиксирующего экрана, превышающего 0,1 мм, наклон устраняют в мастерской. Пользоваться такими экранами без устранения крена нельзя.

Описанная операция производится последовательно с каждым фиксирующим экраном. Выполнение этой проверки для всего комплекта фиксирующих экранов занимает 30—35 мин.

3. Горизонтальная осевая нить контрольной сетки фотопротрактора должна быть параллельна рабочей поверхности стола прибора. Поместив фотопротрактор на приведенный в горизонтальное положение рабочий стол комплекта, подключают прибор к электрической сети и зажигают лампочку подсвета контрольной сетки. На освещенную сетку наводят трубу теодолита, поставленного в 4—5 м от прибора. Крест нитей теодолита сначала наводят на пересечение осевых линий контрольной сетки, а затем, передвигая крест нитей по горизонтали, проводят его вдоль всей

оси ХХ контрольной сетки. Если при этом крест нитей не сходит с оси ХХ сетки, то условие выполнено. Если же на краях контрольной сетки крест нитей отходит от осевой линии более чем на 0,2 мм, то при помощи микрометрических винтов передних опор прибора уменьшают обнаруженный крен оси ХХ прибора на половину измеренного отклонения. После этого крест нитей теодолита снова проводят вдоль всей оси ХХ контрольной сетки и, если крест нитей снова отходит от осевой линии, хотя и незначительно, операцию повторяют. Обычно достаточно двух приближений.

4. Главный луч фотопротрактора, проходящий через пересечение осевых линий контрольной сетки и центр проектирующего отверстия в диафрагме, должен быть параллельным рабочей поверхности стола. На листе чертежной бумаги, положенном на рабочий стол и закрепленном грузиками, прочерчивают линию, лежащую в створе визирного луча теодолита, поставленного в 4—5 м от стола. Над этой линией ставят фотопротрактор задней стенкой к теодолиту и так, чтобы фиксаторная игла прибора и вертикальная ось задней опоры расположились на прочерченной линии. Включив подсвет контрольной сетки фотопротрактора, наводят крест нитей теодолита на главную точку сетки, после чего закрепляют трубу теодолита. Затем разворачивают фотопротрактор на 180° и снова ставят его симметрично относительно карандашной линии. Включают лампочки подсвета конуса проектора и наблюдают в теодолит светящееся отверстие диафрагмы, определяя его положение относительно креста нитей теодолита. Если крест нитей приходится точно по центру светящегося отверстия, то условие выполнено. Если же крест отходит, то для исправления действуют одновременно обоими микрометрическими винтами передних опор прибора. После 2—3 приближений условие оказывается выполненным полностью.

5. Фиксаторная игла должна располагаться на одной вертикали с центром проектирующего отверстия в диафрагме прибора. Установив фотопротрактор диафрагмой в сторону теодолита, наводят вертикальную нить теодолита на середину проектирующего отверстия в диафрагме, а затем, нажав на фиксаторную иглу, делают накол на подложенном под прибор листе бумаги. Фотопротрактор сдвигают в сторону, а в полученный прокол вставляют тонкую иглу. Позади иглы укладывают счетную линейку скошенным ребром с делениями в сторону теодолита. Наблюдая в теодолит и не трогая винтов горизонтального лимба, определяют, «бьет» ли вертикальная нить теодолита на выставленную иглу. Если игла отходит от нити, то делают по линейке два отсчета  $N$  и  $N_n$  по игле и по нити, отсчитывая десятые доли миллиметра на глаз. Разность отсчетов выражает величину отхождения фиксаторной иглы от вертикали. На эту величину смещают в нужную сторону всю площадку, несущую на себе фиксаторное устройство. Остаточное отклонение иглы от вертикали допускается не более чем на 0,1 мм.

Выполнив первую часть проверки правильности установки фиксаторной иглы, разворачивают фотопротрактор на 90° и ставят его так, чтобы вертикальная нить теодолита «била» на обрез торца конуса проектора, а плоскость диафрагмы располагалась в коллимационной плоскости теодолита. Закрепив лимб теодолита и трубу в положении, когда вертикальная нить инструмента наведена на наружный край диафрагмы, делают новый накол фиксаторной иглой. Убрав фотопротрактор и поставив в накол иглу визированием через трубу теодолита, определяют, «бьет» ли вертикальная нить на иглу. Если этого не наблюдается, то, сделав

отсчеты  $N_n'$  и  $N_n''$ , определяют величину и направление отхождения нити от иглы.

Исправление выполняется при помощи винта, имеющегося при площадке, несущей на себе фиксаторную иглу. После приведения иглы к вертикали, обычно достигаемого в 2—3 приема, с обеих шкал, на тубусе и на площадке иглы, снимают отсчеты и записывают в формуляр поверки прибора.

6. Главный луч фотопротрактора должен быть перпендикулярным к плоскости прикладной рамки прибора. Для проверки соблюдения этого условия на листе чертежной бумаги строят прямые  $AC$  и  $BD$ , расположенные Т-образно (рис. 5). Этот лист кладут на рабочий стол прибора, приведенный в горизонтальное положение. В точке  $B$  пересечения прямых  $AC$  и  $BD$  устанавливают тонкую иглу, на которую наводят трубу теодолита, находящегося в 4—5 м от прибора. Затем на линии  $BD$ , ближе к точке  $D$ , выставляют вторую иглу с условием, чтобы она располагалась в плоскости визирования. Если этого сразу не удастся достигнуть, то, прочно удерживая иглу в точке  $B$ , слегка разворачивают весь лист бумаги до тех пор, пока вторая игла не войдет в створ с иглой  $B$ . После этого лист бумаги надежно закрепляют грузиками. Далее над точкой  $B$  центрируют экран с точечным подсветом, расположенным на высоте отстояния центра проекции фотопротрактора от поверхности стола. На прямой  $BD$  в 40—45 см от точки  $B$  устанавливают иглу фотопротрактора, ставя прибор на рабочий стол так, чтобы вертикальная ось его задней опоры также приходилась на линии  $BD$ .

Диафрагму конуса фотопротрактора устанавливают так, чтобы рабочим отверстием служило отверстие с наибольшим диаметром. Включают подсвет сетки фотопротрактора и проектирующего отверстия в диафрагме. Не нарушая положения коллимационной плоскости теодолита, приводят трубу в горизонтальное положение и наводят крест нитей одновременно на главную точку сетки и на центр проектирующего отверстия. Если это удастся сделать сразу, то прибор установлен надлежащим образом и его главный луч лежит в вертикальной плоскости, следом которой служит линия  $BD$ . Если же главная точка и центр проектирующего отверстия не «бьют» на крест нитей, то, сообразив, в какую сторону нужно сдвигать прибор или как его разворачивать, при-

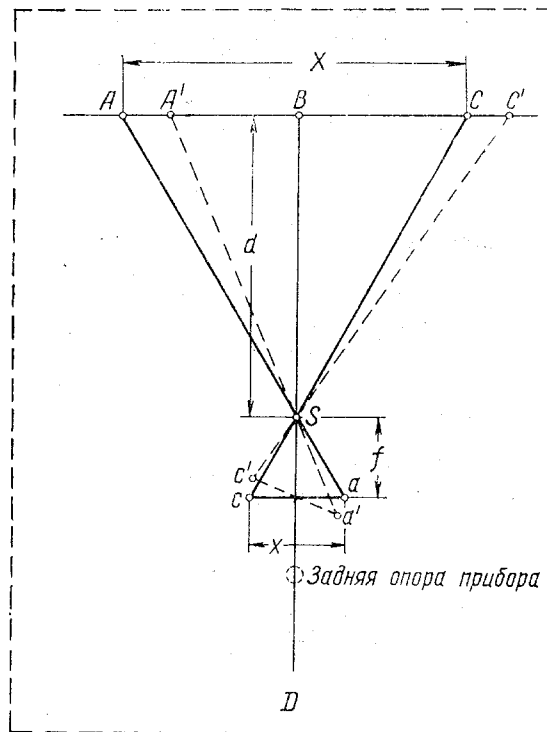


Рис. 5. Схема проверок перпендикулярности главного луча к плоскости сетки и определения места нулей шкал установки  $f$

дают фотопротрактору нужное положение. На этом завершается предварительная установка прибора.

Окончательная его установка с ориентированием по линии  $BD$  осуществляется путем визирования теодолитом через главную точку контрольной сетки и центр проектирующего отверстия на точку, расположенную на вертикали точки  $B$ . Для этого включают подсвет сетки и включают в электросеть экран  $B$ . Точечное отверстие в этом экране начинает светиться. Наблюдая в трубу теодолита светящееся отверстие экрана  $B$ , стремятся получить его изображение на кресте нитей теодолита, в крайнем случае на его вертикальной нити. Если это сразу наблюдать не удастся, то слегка изменяют положение прибора так, чтобы все три точки лежали на кресте нитей трубы теодолита. Когда это окажется достигнутым, можно окончательно сказать, что главный луч фотопротрактора точно расположен в вертикальной плоскости  $BD$ , перпендикулярной к вертикальной плоскости  $AC$ .

Затем, заменив контрольную сетку черной пленкой с симметрично расположенными проколами в ней, включают подсвет матрицы и проектируют проколы в пленке на общий экран, прикрепленный к торцу рабочего стола. Заметив на нем изображение двух симметричных относительно  $B$  точек, лежащих на оси  $XX$  прибора, ставят на линии  $AC$  два фиксирующих экрана так, чтобы изображение каждой из симметричных точек совпало с вертикальной нитью экрана.

Выключив осветитель и включив верхний свет, проверяют, лежат ли пересечения нитей фиксирующих экранов на линии  $AC$ . Если нет, то, установив экраны на этой линии, снова проверяют, «бьют» ли симметричные точки на вертикали экранов. Когда оба этих условия одновременно осуществлены, делают иглой наколы через пересечения нитей установочных сеток всех трех экранов  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Затем, сняв экраны, штангенциркулем измеряют отрезок  $AB$  и сличают его с отрезком  $BC$ . Если они отличаются друг от друга не более чем на  $0,2$  мм, то условие считается выполненным.

Если же расхождение окажется больше допустимого, то, действуя исправительными винтами рамки с контрольной сеткой, необходимо передвинуть сетку влево или вправо, сместив таким образом главную точку сетки на нужную величину. При этом стекло сдвигают влево, если отрезок  $AB < BC$ , и вправо, если  $AB > BC$ . После этого, проделав предварительно операцию ориентирования главного луча фотопротрактора относительно линии  $BD$ , вторично проектируют те же точки контрольной сетки на фиксирующие экраны.

Сличают отрезки  $AB$  и  $BC$ ; в случае расхождения в их длинах смещение главной точки контрольной сетки повторяют и далее действуют так, как это уже было описано. Два-три последовательных приближения позволяют добиться соблюдения поставленного условия.

7. Проектирующее отверстие в диафрагме фотопротрактора должно отстоять от главной точки контрольной сетки прижимного стекла на величину фокусного расстояния съемочной фотокамеры. Для определения величины отстояния центра проектирующего отверстия фотопротрактора от главной точки контрольной сетки устанавливают прибор аналогично тому, как это делалось в предыдущем случае. Ориентировав главный луч прибора относительно линии  $BC$ , проектируют изображение симметричных точек, лежащих на оси  $XX$  прибора, на вертикали фиксирующих экранов, устанавливаемых на линии  $AC$ , перпендикулярной к линии  $BD$ . Добившись полного совпадения светлых кружков с вертикалями экранов  $A$ ,  $B$  и  $C$  и перекрестий установочных сеток

этих экранов с линией  $AC$ , делают накол  $S$  иглой пуансона и наколы точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  через перекрестия установочных сеток. Затем штангенциркулем измеряют расстояния  $AC = X$  и  $BS = d$ . Зная расстояние  $x$  между симметричными точками контрольной сетки, искомое отстояние  $f$  центра проекции от главной точки подсчитывают по формуле:

$$f = \frac{dx}{X}.$$

Операцию повторяют не менее трех раз при разных значениях  $d$ . Из полученных значений  $f$  берут среднее арифметическое, которое принимают за окончательный результат.

Затем снимают отсчет со шкалы проектора и сличают его с  $f_{\text{ср}}$ . Если  $f$  шкалы и  $f$  практическое различаются, определяют место нуля шкалы тубуса и с учетом полученного места нуля по шкале устанавливают тубус на величину  $f_{\text{задн}}$ , равную фокусному расстоянию камеры, которой производилась фотосъемка.

После этого необходимо на соответствующий отсчет поставить также иглу фиксатора, учтя при этом место нуля его шкалы.

После установки тубуса на  $f_{\text{задн}}$  операцию непосредственного определения  $f_{\text{задн}}$  по проекциям точек сетки и отстоянию от линии  $AC$  надо повторить.

Из перечисленных семи проверок только проверки 1, 2 и 7 осуществляются лицом, непосредственно работающим с прибором. Остальные проверки, связанные с юстировками, выполняются в мастерских перед выпуском прибора. В дальнейшем, по мере роста срока эксплуатации прибора, эти проверки могут осуществляться производителями лишь в порядке наблюдения за техническим состоянием прибора и не чаще чем один раз в год.

ТРУДЫ МОСКОВСКОГО ИНСТИТУТА ИНЖЕНЕРОВ ГЕОДЕЗИИ,  
АЭРОФОТОСЪЕМКИ И КАРТОГРАФИИ

Выпуск 25

1957 г.

Кафедра геодезии

Доцент кандидат техн. наук В. Г. Селиханович

**УЧЕТ ОШИБОК ИСХОДНЫХ ДАННЫХ В ПОЛИГОНОМЕТРИИ**

При анализе триангуляций, построенных до революции, было установлено, что при обработке результатов полевых измерений многие треугольники получили такие поправки в углы, что дальнейшее сгущение сети оказалось невозможным; такую сеть можно было использовать только при мелкомасштабных съемках. Нередки случаи, когда углы триангуляции одной из последующих очередей построения получают поправки, выходящие далеко за пределы точности этой триангуляции.

Приведем примеры. Триангуляция 1867 года в Пруссии была уравнена дважды: как свободная сеть, при этом средняя ошибка уравнированного угла получилась равной  $0''{,}52$ ; затем как несвободная сеть между ранее построенными триангуляциями 1837—1865 гг. В этом случае ошибка уравнированного угла получилась равной  $\pm 2''{,}40$ , а в некоторые направления введены поправки более  $4''$ .

При смыкании триангуляции Германии и Дании в некоторые углы были введены поправки в  $10''$  при средней ошибке угла  $\pm 0''{,}5$ .

В. В. Витковский в своей книге «Практическая геодезия» приводит пример, в котором при уравнивании полигонов триангуляции поправки в углы доходили до  $17''$ .

Заместитель начальника Главного управления геодезии, аэрофото-съемки и картографии С. Г. Судаков также приводит случаи, когда при вставке заполняющих сетей и рядов расхождения в координатах достигали 13 и более метров, а поправки в углы, измеренные с точностью  $2-3''$ , достигали  $15''$ .

Эти и другие примеры показывают, насколько может быть искажена хорошая по качеству сеть, если она опирается на пункты, имеющие значительные погрешности. Изучение характера ошибок исходных данных, а также законов, по которым эти погрешности влияют на элементы последующих построений, является одной из актуальных задач.

Повышение точности опорных геодезических сетей не может быть достигнуто только за счет увеличения числа приемов при измерении углов или за счет применения более точных инструментов. Решить эту задачу можно только путем совместного применения и более совершенных инструментов, и методики наблюдений, и методики обработки; последняя должна приводить к максимальной компенсации случайных ошибок и ослаблению влияния систематических ошибок.

При уравнивании по способу наименьших квадратов исходные данные условно принимают безошибочными. В действительности же исходные данные являются либо непосредственно измеренными величинами, либо функциями уравновешенных величин, имеющими погрешности.

В нашей геодезической практике опорные сети строятся по принципу «от общего к частному».

Отсюда следует, что только повышением точности измерений не всегда можно повысить точность последующего построения. В некоторых случаях оно не имеет никакого практического значения, так как может быть погашено ошибками исходных данных, которые при определенных условиях являются главными источниками погрешностей.

В полигонометрии исходными данными являются азимуты сторон и координаты пунктов ранее построенной и уравновешенной триангуляции или полигонометрии высшего разряда.

Чтобы судить о влиянии исходных данных, надо знать соотношение погрешностей между этими данными и внутренними, собственными, погрешностями нового построения.

Проф. А. С. Чеботарев в работе [6] указывает, что уравнивание в полигонометрии осложняется тем обстоятельством, что опорные пункты не являются точными и ошибки в их координатах, а равно и азимутах направлений с них полигонометрия должна принимать на себя.

Понятно, что в таком случае уравнивательные вычисления не улучшают результатов полевых измерений, хотя и приводят к меньшей деформации отдельных частей полигонометрической сети.

В работе проф. А. С. Чеботарева указываются и некоторые пути ослабления влияния ошибок исходных данных.

Ф. Н. Красовский в своем труде «Руководство по высшей геодезии» (ч. I) рассматривает вопрос деформации при вставке тригонометрических сетей II класса и рядов II класса между опорными пунктами и сторонами I класса, тут же он указывал, что при расчете допусков при составлении условий координат в сетях II класса ошибки координат исходных пунктов должны приниматься во внимание.

В 1940 г. в первом сборнике Трудов МИИГАиК проф. А. С. Чеботарев опубликовал статью «Оценка точности полигонометрических ходов с учетом ошибок исходных данных». В ней впервые ставится и до некоторой степени разрешается вопрос об оценке точности с учетом ошибок исходных данных.

Инженер-геодезист Пранис-Праневич в 1939 г. опубликовал работу [2]. Рассматривая величины  $F$  — функции непосредственно измеренных величин  $U_1', U_2', U_3', \dots, U_n'$  и ошибок исходных данных  $\alpha, \beta, \gamma$ , он применяет к такой функции формулу теории ошибок для вычисления средней квадратической ошибки функции независимых переменных

$$m_F^2 = \left\{ \frac{1}{p_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_1'} \right)^2 + \frac{1}{p_2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_2'} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p_n} \left( \frac{\partial F}{\partial u_n'} \right)^2 \right\} \mu^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)^2 m_\alpha^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial \beta} \right)^2 m_\beta^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right)^2 m_\gamma^2,$$

где  $\mu$  — средняя квадратическая ошибка единицы веса, характеризующая точность измеренных величин;  $p_i$  — веса непосредственно измеренных величин;  $m_\alpha, m_\beta, m_\gamma$  — средние квадратические ошибки исходных данных.

При наличии в качестве исходных данных величин, действительно независимых, эта формула вполне строго решает вопрос.

Выводы Пранис-Праневича нашли применение в производстве. Об этом сообщает инженер Д. А. Ларин в статье «Оценка точности триангуляции при учете ошибок исходных данных», опубликованной в XXII выпуске сборника ГУГК.

Сложность оценки точности обусловлена, главным образом, значительным числом исходных элементов. Их число особенно велико, когда оценивается сеть, относящаяся к одной из последующих очередей построения. В этом случае необходимо учитывать ошибки элементов, относящихся ко всем предыдущим построениям.



В сборниках трудов МИИГАиК № 9 и 12 опубликована работа автора настоящей статьи. Она посвящена учету ошибок исходных данных при создании геодезической опоры. В работе даны общие формулы, выражающие закономерности влияния ошибок исходных данных на точность опорных сетей.

Формулы выведены для случая уравнивания по методу условных измерений. В этом случае коррелаты, вероятнейшие поправки измеренных величин и ошибки функций уравновешенных значений можно выразить через свободные члены условных уравнений, которые в определенных условиях являются результатом не только ошибок измерений, но и ошибок исходных данных.

Если бы относительные ошибки базисов, а также ошибки исходных азимутов и координат в триангуляции, равно как ошибки исходных дирекционных углов и координат в полигонометрии были равны по величине и знаку, то в процессе уравнивания вставляемой сети ошибки исходных данных не оказали бы никакого влияния на величины поправок. Последние были бы следствием только ошибок измерений. Ошибки исходных данных вызвали бы только общую ошибку в положении, масштабе и ориентировке триангуляции.

Конечно, в общем случае ошибки исходных данных не равны между собой. Вследствие этого в свободные члены дополнительных условных уравнений войдут разности ошибок соответственных исходных данных. Поэтому можно сказать, что координаты условных уравнений и найденные по ним поправки измеренных величин, а также функции этих величин после их уравнивания будут искажены влиянием разностей ошибок соответственных исходных данных.

Необходимо отметить, что влияние ошибок исходных данных на измеренные величины и элементы триангуляции будет иметь в общем систематический характер. В этом случае применение способа наименьших квадратов к уравниванию результатов измерений становится не вполне законным. Свободные члены условных уравнений будут содержать некоторые ошибки, ничего общего не имеющие с ошибками уравниваемых результатов измерений. Поэтому степень строгости результатов уравниваемой триангуляции или других построений будет зависеть от соотношения ошибок измерений и ошибок исходных данных. Если ошибки исходных данных по сравнению с ошибками измерений действительно малы, то из уравнивания получим поправки измеренных величин, весьма близкие к вероятнейшим значениям. Обычная оценка точности элементов построений как функции уравнишенных величин также будет обоснована.

Однако даже при современной высокой точности измерений линий и углов нельзя пренебрегать ошибками исходных данных.

Если уравнивание измеренных величин производится по способу наименьших квадратов обычным образом, то это приводит лишь к формальному устранению расхождений результатов измерений между собой и с исходными данными. Во всяком случае при этом не получаем вероятнейших значений поправок измеренных величин. Это отражается на оценке точности элементов построений как функций уравнишенных величин. В этом случае обычные методы оценки точности элементов триангуляции уже не применимы. При правильной постановке задачи по оценке точности элементов построений как функции уравнишенных величин необходимо учесть влияние как ошибок измерения этих величин, так и ошибок исходных данных.

Трудности практического решения этой задачи заключаются в том, что и те и другие ошибки неизвестны и неотделимы друг от друга в про-

цессе самих уравнивательных операций. Но в общей теоретической постановке этой задачи все же можно изучать в отдельности их влияние.

По-видимому, возможны различные методы исследования влияния ошибок исходных данных на точность элементов построений — триангуляции или полигонометрии или вообще функции уравновешенных величин. Но любой способ учета влияния ошибок исходных данных на точность функций уравновешенных величин должен соответствовать тому закону, по которому эти ошибки перекладываются и влияют на измеренные величины при их уравновешивании по способу наименьших квадратов.

В дальнейшем ошибки исходных данных разделим на две группы. В первую группу отнесем общую часть этих ошибок, во вторую группу — ошибки индивидуальные. Влияние ошибок второй группы на результаты уравновешивания будем называть косвенным влиянием ошибок исходных данных.

В указанных трудах МИИГАиК автором был изложен общий метод оценки влияния ошибок исходных данных на точность функций уравновешенных величин. При этом не делалось никаких предположений о типе и характере уравнений, а поэтому этот метод и полученные общие формулы применимы и при оценке влияния ошибок исходных данных на элементы полигонов триангуляции, нивелирных и полигонометрических сетей. Применим предложенный метод к учету влияния ошибок исходных данных на элементы полигонометрического хода.

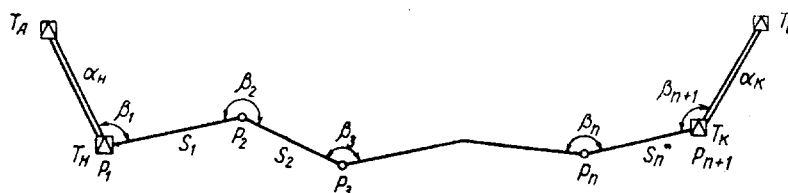


Рис. 1

Для простоты возьмем полигонометрический ход вытянутой формы с примерно равными сторонами (рис. 1). Ход проложен между двумя твердыми точками  $T_H$  и  $T_K$  и двумя линиями  $\overline{T_A T_H}$  и  $\overline{T_K T_B}$  с известными дирекционными углами; в ходе измерены  $n$  сторон и  $(n+1)$  углов, т. е. сделано всего  $(2n+1)$  измерений. Необходимо найти абсциссу и ординату  $(n-1)$  точек поворота.

В данном одиночном полигонометрическом ходе возникает три условных уравнения. Так как деление этих уравнений на две группы можно произвести простым преобразованием координат, то общее теоретическое обоснование этого метода здесь не излагается, так как оно достаточно подробно изложено в упомянутой выше работе.

Три условных уравнения вызваны наличием избыточных исходных данных. Свободные члены этих условных уравнений зависят от ошибок измерений и от ошибок исходных данных.

Условные уравнения можно записать в таком виде:

$$[d\beta'] + d\alpha_H - d\alpha_K = -f_\beta', \quad (1)$$

$$[\Delta x'] - (x_K - x_H) = f_x', \quad (2)$$

$$[\Delta y'] - (y_K - y_H) = f_y'. \quad (3)$$

Так как исходные данные имеют ошибки, то возникновение невязки является результатом ошибок измеренных величин (длин линий и углов) и исходных данных (дирекционных углов и координат).

Если в уравнения (2) и (3) вместо вычисленных приращений подставим истинные, а вместо данных координат твердых пунктов — их истинные значения, то в правой части этих уравнений вместо невязок получим нули

$$\begin{aligned} [\Delta x' + d\Delta x] - (x_K + dx_K - x_H - dx_H) &= 0, \\ [\Delta y' + d\Delta y] - (y_K + dy_K - y_H - dy_H) &= 0. \end{aligned}$$

Если из этих уравнений вычтем соответственно уравнения (2) и (3), то найдем

$$\left. \begin{aligned} [d\Delta x'] - (dx_K - dx_H) &= -f'_x \\ [d\Delta y'] - (dy_K - dy_H) &= -f'_y \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Истинные ошибки в приращениях  $d\Delta x$  и  $d\Delta y$  заменим независимыми величинами — ошибками углов и линий.

Для этого воспользуемся формулами  $\Delta x = s \cos \alpha$  и  $\Delta y = s \sin \alpha$ . После дифференцирования найдем

$$d\Delta x = \cos \alpha ds - s \sin \alpha \frac{d\alpha}{\rho},$$

$$d\Delta y = \sin \alpha ds + s \cos \alpha \frac{d\alpha}{\rho}.$$

В результате небольших преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} d\Delta x &= \Delta x \frac{ds}{s} - \Delta y \frac{d\alpha}{\rho} \\ d\Delta y &= \Delta y \frac{ds}{s} + \Delta x \frac{d\alpha}{\rho} \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Величины  $d\alpha$  здесь зависимые, так как дирекционные углы являются функциями измеренных углов.

Учитывая это обстоятельство, произведем дальнейшие преобразования величин  $d\alpha$ . Дирекционный угол каждой стороны полигонометрического хода вычисляется по формуле

$$\alpha'_i = \alpha_H + \sum_1^i \beta'_i - i \cdot 180^\circ.$$

Продифференцируем это выражение и полученный результат

$$d\alpha'_i = d\alpha_H + \sum_1^i d\beta'_i$$

подставим в уравнения (5), тогда

$$\left. \begin{aligned} d\Delta x'_i &= \Delta x'_i \frac{ds_i}{s_i} - \Delta y'_i \frac{1}{\rho} \sum_1^i d\beta'_i - \frac{1}{\rho} \Delta y'_i \cdot d\alpha_H \\ d\Delta y'_i &= \Delta y'_i \frac{ds_i}{s_i} + \Delta x'_i \frac{1}{\rho} \sum_1^i d\beta'_i + \frac{1}{\rho} \Delta x'_i \cdot d\alpha_H \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Истинные значения ошибок приращений подставим в уравнения (4) и найдем

$$\left. \begin{aligned} [\cos \alpha' ds] - \frac{1}{\rho} \left[ \Delta y'_i \cdot \sum_1^i d\beta'_i \right] - \frac{d\alpha_H}{\rho} [\Delta y'_i] - (dx_K - dx_H) &= -f'_x \\ [\sin \alpha' ds] + \frac{1}{\rho} \left[ \Delta x'_i \cdot \sum_1^i d\beta'_i \right] + \frac{d\alpha_H}{\rho} [\Delta x'_i] - (dy_K - dy_H) &= -f'_y \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Введем обозначения

$$A' = \left[ \Delta y_i' \cdot \sum_1^i d\beta_i' \right]; \quad B' = \left[ \Delta x_i' \cdot \sum_1^i d\beta_i' \right].$$

Раскрыв выражения для  $A'$ , получим

$$A' = [(y'_{n+1} - y'_i) d\beta_i']_1^n.$$

Прибавив к этому выражению член

$$(y'_{n+1} - y'_{n+1}) d\beta'_{n+1},$$

тождественно равный нулю, найдем

$$A' = [(y'_{n+1} - y'_i) d\beta_i']_1^{n+1}. \quad (8)$$

Совершенно аналогично получим

$$B' = [(x'_{n+1} - x'_i) d\beta_i']_1^{n+1}. \quad (9)$$

В выражениях для  $A'$  и  $B'$  учитываются все углы вплоть до  $(n+1)$ . Далее значок  $i$  опустим, тогда уравнение (7) примет вид

$$\left. \begin{aligned} [\cos \alpha' ds] - \frac{1}{\rho} [(y'_{n+1} - y') d\beta'] - \frac{1}{\rho} (y'_{n+1} - y_H) d\alpha_H - (dx_K - dx_H) + f_x' &= 0 \\ [\sin \alpha' ds] + \frac{1}{\rho} [(x'_{n+1} - x') d\beta'] + \frac{1}{\rho} (x'_{n+1} - x_H) d\alpha_H - (dy_K - dy_H) + f_y' &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Эти уравнения выведены для случая, когда измеренные углы не исправлялись предварительно за невязку в сумме углов. Предположим, что в каждый угол введена первичная поправка, выражающаяся формулой

$$v_i' = - \frac{f_{\beta}'}{n+1}.$$

Тогда исправленные углы будут соответственно равны

$$\beta_i = \beta_i' + v_i'$$

или

$$\beta_i' = \beta_i - v_i = \beta_i + \frac{f_{\beta}'}{n+1}. \quad (11)$$

Истинные ошибки измеренных углов обозначали  $d\beta'$ , истинные ошибки предварительно исправленных углов обозначали  $d\beta^*$ . Ясно, что

$$\beta_i' + d\beta_i' = \beta_i + d\beta_i,$$

откуда

$$d\beta_i = d\beta_i' + \beta_i' - \beta_i.$$

Учитывая равенство (11), получим

$$d\beta_i = d\beta_i' + \frac{f_{\beta}'}{n+1}$$

или

$$[d\beta] = [d\beta'] + f_{\beta}'.$$

Принимая во внимание (1), найдем

$$[d\beta] - d\alpha_H + d\alpha_K = 0. \quad (12)$$

\* В дальнейшем все величины, соответствующие исправленным углам, обозначены прежними символами, но без штрихов.

Уравнение (2) получено для предварительно исправленных углов. Но если углы исправлены первичными поправками, то и величины, вычисляемые по этим углам, будут уже иными. Следовательно, в уравнении (10) величины  $f'_x, f'_y, \alpha', y'_{n+1}, y', x'_{n+1}, x'_i$  и  $d\beta_i$  надо заменить с учетом введенной поправки в углы. Тогда равенства

$$\left. \begin{aligned} [\cos \alpha ds] - \frac{1}{\rho} [(y_{n+1} - y) d\beta] - \frac{1}{\rho} (y_{n+1} - y_H) d\alpha_H - (dx_K - dx_H) + f_x &= 0 \\ [\sin \alpha ds] + \frac{1}{\rho} [(x_{n+1} - x) d\beta] + \frac{1}{\rho} (x_{n+1} - x_H) d\alpha_H - (dy_K - dy_H) + f_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

представят собой условные уравнения координат для случая предварительно исправленных углов.

Выражение

$$[(y_{n+1} - y) d\beta]$$

представим в виде двух сумм

$$[(y_{n+1} - y) d\beta] = y_{n+1} [d\beta] - [y d\beta]. \quad (14)$$

С учетом (12) получим

$$[(y_{n+1} - y) d\beta] = y_{n+1} (d\alpha_K - d\alpha_H) - [y d\beta].$$

Прибавив к правой части равенства член

$$y_{II} \{ [d\beta] - (d\alpha_K - d\alpha_H) \},$$

тождественно равный нулю, найдем

$$\begin{aligned} [(y_{n+1} - y) d\beta] &= (y_{n+1} - y_{II}) (d\alpha_K - d\alpha_H) - [(y - y_{II}) d\beta] = \\ &= \eta_{n+1} (d\alpha_K - d\alpha_H) - [\eta d\beta], \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\eta_i = y_i - y_{II}.$$

Аналогично для второго уравнения (13) можно получить

$$[(x_{n+1} - x) d\beta] = \xi_{n+1} (d\alpha_K - d\alpha_H) - [\xi d\beta], \quad (16)$$

в котором  $\xi_i = x_i - x_{II}$ .

В формулах (15) и (16) величины  $x_{II}$  и  $y_{II}$  могут быть выбраны произвольно. Воспользуясь этим, поставим условие, чтобы

$$x_{II} = \frac{[x]}{n+1} \quad \text{и} \quad y_{II} = \frac{[y]}{n+1}, \quad (17)$$

т. е.  $x_{II}$  и  $y_{II}$  являются координатами «центра тяжести» хода.

Величины  $\xi$  и  $\eta$  — координаты вершин хода, отнесенные к новому началу, за которое мы приняли центр тяжести. Назовем такие координаты «центрными». Вычисляются они по формулам

$$\xi_i = x_i - \frac{[x]}{n+1}; \quad \eta_i = y_i - \frac{[y]}{n+1}. \quad (18)$$

Так как  $\xi$  и  $\eta$  — отклонения от арифметической середины, то

$$[\xi] = 0 \quad \text{и} \quad [\eta] = 0. \quad (19)$$

Подставим (15) и (16) в уравнение (13) и, сделав приведение подобных членов, получим

$$\left. \begin{aligned} [\cos \alpha ds] + \frac{1}{\rho} [\eta d\beta] + \frac{1}{\rho} (y_{II} - y_{II}) d\alpha_H - \frac{1}{\rho} (y_{n+1} - y_{II}) d\alpha_K - (dx_K - dx_H) + f_x &= 0 \\ [\sin \alpha ds] - \frac{1}{\rho} [\xi d\beta] - \frac{1}{\rho} (x_{II} - x_{II}) d\alpha_H + \frac{1}{\rho} (x_{n+1} - x_{II}) d\alpha_K - (dy_K - dy_H) + f_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Положим, что в данной системе опорных пунктов имеется общая часть ошибки в дирекционных углах  $d\alpha$ . Оставшуюся часть ошибки, оказываемую косвенное влияние на элементы хода, обозначим через  $\delta\alpha_H$  и  $\delta\alpha_K$ , а также, имея в виду, что в формулах (20) разности  $(dx_K - dx_H)$  и  $(dy_K - dy_H)$  выразят те части ошибок, которые оказывают косвенное влияние на элементы хода, обозначим эти величины соответственно  $\delta x_u$  и  $\delta y_u$ . Тогда с учетом того, что

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\approx x_K, \quad y_{n+1} \approx y_K, \\ \left. \begin{aligned} [\cos \alpha ds] + \frac{1}{\rho} [\eta d\beta] + \frac{1}{\rho} (y_H - y_u) \delta\alpha_H - \frac{1}{\rho} (y_K - y_u) \delta\alpha_K - \delta x_u + f_x &= 0 \\ [\sin \alpha ds] - \frac{1}{\rho} [\xi d\beta] - \frac{1}{\rho} (x_H - x_u) \delta\alpha_H + \frac{1}{\rho} (x_K - x_u) \delta\alpha_K - \delta y_u + f_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

В таком виде условные уравнения не находят применения, так как при уравнивании по способу наименьших квадратов поправки определяются только к измеренным углам и линиям, а исходные данные не исправляются. Если целью уравнивания являлось нахождение поправки и к исходным данным, то необходимо было бы эти ошибки выразить через ошибки непосредственных измерений всех ранее произведенных построений. Такая задача, очевидно, была бы неразрешимой.

Уравнения вида (21) можно использовать при оценке точности полигонометрических ходов с учетом ошибок исходных данных, а также при оценке косвенного влияния ошибок исходных данных на элементы полигонометрического хода после уравнивания по способу наименьших квадратов. В статье рассматривается последнее.

Воспользуемся обычной формулой условных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } [d\beta] + F_\beta &= 0 \\ \text{II. } [\cos \alpha ds] + \frac{1}{\rho} [\eta d\beta] + F_x &= 0 \\ \text{III. } [\sin \alpha ds] - \frac{1}{\rho} [\xi d\beta] + F_y &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (22)$$

но будем иметь в виду, что невязки  $F_\beta$ ,  $F_x$  и  $F_y$  являются результатом не только ошибок измерений, но и ошибок исходных данных.

Так, для случая предварительно исправленных углов можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } F_\beta &= \delta\alpha_K - \delta\alpha_H \\ \text{II. } F_x &= \frac{1}{\rho} (y_H - y_u) d\alpha_H - \frac{1}{\rho} (y_K - y_u) d\alpha_K - \delta x_u + f_x \\ \text{III. } F_y &= \frac{1}{\rho} (x_H - x_u) d\alpha_H + \frac{1}{\rho} (x_K - x_u) d\alpha_K - \delta y_u + f_y \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Здесь  $f_x$  и  $f_y$  — части невязок, вызванные ошибками измерений, а остальные члены выражают влияние ошибок исходных данных на невязки. Если предварительно исправление углов не было сделано, тогда уравнения II и III из (22) остаются без изменения и только в уравнении (I)  $F_\beta = f'_\beta + \delta\alpha_K - \delta\alpha_H$ . Это дает право для дальнейших рассуждений использовать уравнения (21). В этом уравнении  $d\beta_i$  и  $ds_i$  — истинные ошибки предварительно исправленных углов и истинные ошибки измеренных линий. Указанные ошибки известны. Но из уравнивания по способу наименьших квадратов находим вероятнейшие поправки к углам и линиям. Эти поправки устраняют невязки между измерениями

и опорными данными и удовлетворяют составленным трем условным уравнениям. Поправки должны, по возможности, улучшить результаты измерений и в известной степени заменить истинные ошибки измерений.

Заменяя в выражении (21) истинные ошибки искомыми поправками, получим окончательно:

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } [v''] + F_{\beta} &= 0 \\ \text{II. } [w \cos \alpha] + \frac{1}{\rho} [\eta v''] + F_x &= 0 \\ \text{III. } [w \sin \alpha] - \frac{1}{\rho} [\xi v''] + F_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Здесь  $v_i''$  и  $w_i$  — соответственно поправки в углы и линии.  
Потребуем, чтобы

$$[p_s w^2] + [p_{\beta} v'^2] = \min.$$

Для нахождения весов имеем

$$p_{s_i} = \frac{c}{m_{s_i}^2} = \frac{c}{\mu^2 s_i}; \quad p_{\beta_i} = \frac{c}{m_{\beta}^2} \quad (25)$$

В полигонометрии в формуле для веса стороны величина систематических ошибок не учитывается, так как предполагается, что все меры к устранению их приняты и стороны хода сравнительно невелики. Коэффициент  $c$  может быть выбран «произвольно». Потребуем, чтобы  $c = \mu^2$ , тогда

$$\left. \begin{aligned} p_{\beta_i} &= \frac{\mu^2}{m_{\beta}^2} \\ p_{s_i} &= \frac{1}{s_i} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

В условных уравнениях (21) получим

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_2 = a_3 = \dots = a_{n+1} = 1 \\ b_1 &= b_2 = b_3 = \dots = b_{n+1} = \frac{1}{\rho} \eta_i; \quad b_{n+2} = \cos \alpha_1 \\ b_{n+3} &= \cos \alpha_2 \dots b_{2n+1} = \cos \alpha_n \\ c_1 &= c_2 = \dots = c_{n+1} = -\frac{1}{\rho} \xi_i; \quad c_{n+2} = \sin \alpha_1; \quad c_{n+3} = \sin \alpha_2 \\ &\dots c_{2n+1} = \sin \alpha_n \end{aligned} \right\} \quad (26')$$

Три условных уравнения позволяют составить три нормальных уравнения коррелат

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{aa}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{ab}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{ac}{p} \right] k_3 + F_{\beta} &= 0 \\ \left[ \frac{ab}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{bb}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{bc}{p} \right] k_3 + F_x &= 0 \\ \left[ \frac{ac}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{bc}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{cc}{p} \right] k_3 + F_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Вычислим коэффициенты нормальных уравнений

$$\left[ \frac{aa}{p} \right] = \frac{n+1}{p}; \quad \left[ \frac{ab}{p} \right] = \frac{1}{p\rho} [\eta] = 0; \quad \left[ \frac{ac}{p} \right] = -\frac{1}{p\rho} [\xi] = 0.$$

Обозначим коэффициенты нормальных уравнений буквами с двумя индексами, первый из которых обозначает номер условного уравнения первого множителя, второй — второго множителя. Тогда

$$\left[\frac{aa}{p}\right] = Q_{11} = \frac{n+1}{p}; \quad \left[\frac{ab}{p}\right] = Q_{12} = 0; \quad (28)$$

$$\left[\frac{ac}{p}\right] = Q_{13} = 0; \quad \left[\frac{bb}{p}\right] = Q_{22} = \frac{1}{p\rho^2}[\eta^2] + [s \cos^2 \alpha] = \frac{q}{\rho}[\eta^2] + \left[\frac{\Delta x^2}{s}\right], \quad (29)$$

где

$$\frac{1}{p\rho} = q;$$

$$\left[\frac{bc}{p}\right] = Q_{23} = -\frac{1}{p\rho^2}[\eta\xi] + [s \sin \alpha \cos \alpha] = -\frac{q}{\rho}[\eta\xi] + \left[\frac{\Delta x \Delta y}{s}\right]; \quad (30)$$

$$\left[\frac{cc}{p}\right] = Q_{33} = \frac{1}{p\rho^2}[\xi^2] + [s \sin^2 \alpha] = \frac{q}{\rho}[\xi^2] + \left[\frac{\Delta y^2}{s}\right]. \quad (31)$$

С учетом введенного обозначения нормальные уравнения коррелят примут вид

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } Q_{11} k_1 + F_\beta &= 0 \\ \text{II. } Q_{22} k_2 + Q_{23} k_3 + F_x &= 0 \\ \text{III. } Q_{23} k_2 + Q_{33} k_3 + F_y &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (32)$$

Решая уравнения, получим

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -\frac{F_\beta}{Q_{11}}; \quad k_2 = \frac{1}{N}(Q_{23} F_y - Q_{33} F_x) \\ k_3 &= \frac{1}{N}(Q_{22} F_x - Q_{23} F_y) \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

где

$$N = Q_{22} \cdot Q_{33} - Q_{23}^2. \quad (34)$$

Если в (33)  $Q$  заменить их выражениями, то получим

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -\frac{pF_\beta}{n+1} \\ k_2 &= \frac{1}{N} \left\{ F_y \left( \left[ \frac{\Delta x \Delta y}{s} \right] - \frac{q}{\rho} [\eta\xi] \right) - F_x \left( \left[ \frac{\Delta y^2}{s} \right] + \frac{q}{\rho} [\xi^2] \right) \right\} \\ k_3 &= \frac{1}{N} \left\{ F_x \left( \left[ \frac{\Delta x \Delta y}{s} \right] - \frac{q}{\rho} [\eta\xi] \right) - F_y \left( \left[ \frac{\Delta x^2}{s} \right] + \frac{q}{\rho} [\eta^2] \right) \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (35)$$

Таким образом, корреляты выражены через свободные члены условных уравнений. Если искомые поправки выразить через корреляты известными способами, то поправки к измеренным величинам будут выражены через свободные члены условных уравнений. Так, получим

$$v_i'' = -\frac{F_\beta}{pQ_{11}} + q(\eta_i k_2 + \xi_i k_3), \quad (36)$$

$$w_i = \Delta x_i k_2 + \Delta y_i k_3. \quad (37)$$

Выразив любой уравновешенный элемент полигонометрического хода в виде функции измеренных величин и их поправок согласно (36) и (37), получим возможность исследовать косвенное влияние ошибок исходных данных на этот элемент.





где  $U_0$  — значение функции  $U$ , вычисленное по измеренным значениям величин  $x_i$  и безошибочным исходным данным;  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i$  — частные производные этой функции по измеренным величинам и  $\frac{\partial F}{\partial \omega} = F_i$  — частные производные функции по исходным данным.

С учетом этих обозначений получим

$$U = U_0 + f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 + \dots + f_n v_n + F_1 \Delta \omega_1 + F_2 \Delta \omega_2 + \dots \quad (42)$$

Если имеем всякий ход (свободный), то ошибки исходных данных оказывают на функцию уравновешенных величин только прямое влияние, которое для функции заданного вида остается постоянным. Вид функции не изменится, если рассматривать несвободные сети. Но здесь, кроме прямого влияния, на данную функцию ошибки исходных данных оказывают и косвенное влияние, которое, как уже указывалось, вызывает деформацию сети.

Как в случае свободных сетей, так и несвободных последние члены функции (42),  $F_1 \Delta \omega_1, F_2 \Delta \omega_2, \dots$  выражают прямое влияние ошибок исходных данных, а вторые  $f_1 v_1, f_2 v_2$  зависят и от ошибок измерений, и от ошибок исходных данных, выражая косвенное влияние последних.

Рассмотрим функцию

$$\Delta U = f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 + \dots + f_n v_n, \quad (43)$$

точность которой зависит от ошибок измерений и от индивидуальных ошибок исходных данных, искажающих свободные члены условных уравнений. С учетом того, что поправки в общем виде выражаются как

$$v_i = \frac{1}{p_i} (a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + \dots),$$

преобразуем функцию (43) и выразим ее через корреляты нормальных уравнений; тогда получим

$$\begin{aligned} \Delta U = & \frac{f_1}{p_1} (a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \dots + r_1 k_r) + \\ & + \frac{f_2}{p_2} (a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \dots + r_2 k_r) + \\ & + \dots + \\ & + \frac{f_n}{p_n} (a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3 + \dots + r_n k_r), \end{aligned}$$

или

$$\Delta U = \left[ \frac{af}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{bf}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{cf}{p} \right] k_3 + \dots + \left[ \frac{rf}{p} \right] k_r. \quad (44)$$

Принимая во внимание выражение коррелят через свободные члены, найдем выражение функции  $\Delta U$  через свободные члены:

$$\begin{aligned} \Delta U = & - \left[ \frac{af}{p} \right] \frac{f_p}{Q_{11}} + \left[ \frac{bf}{p} \right] \frac{1}{N} (Q_{23} F_y - Q_{33} F_x) + \\ & + \left[ \frac{cf}{p} \right] \frac{1}{N} (Q_{23} F_x - Q_{22} F_y). \end{aligned} \quad (45)$$

Обозначив это уравнение четвертым номером, найдем

$$\left[ \frac{af}{p} \right] = Q_{14}; \quad \left[ \frac{bf}{p} \right] = Q_{24}; \quad \left[ \frac{cf}{p} \right] = Q_{34}. \quad (46)$$

С учетом ранее выведенных значений для  $a, b, c$ , (26') получим

$$Q_{14} = \left[ \frac{af}{p} \right] = \left[ \frac{f}{p} \right]; \quad (47)$$

$$Q_{24} = \left\{ \frac{1}{p\rho} \left[ \eta f \right]_1^{n+1} + \left[ \frac{\cos \alpha f}{p_s} \right]_1^n \right\} = \left\{ q \left[ \eta f \right]_1^{n+1} + \left[ \frac{\cos \alpha f}{p_s} \right]_1^n \right\} = \left\{ q \left[ \eta f \right] + \left[ \Delta x f \right] \right\}; \quad (48)$$

$$Q_{34} = \left\{ \frac{1}{p\rho} \left[ \xi f \right]_1^{n+1} + \left[ \frac{\sin \alpha f}{p_s} \right]_1^n \right\} = \left\{ -q \left[ \xi f \right]_1^{n+1} + \left[ \frac{\sin \alpha f}{p_s} \right]_1^n \right\} = \left\{ -q \left[ \xi f \right] + \left[ \Delta y f \right] \right\}. \quad (49)$$

Величины  $f_i$  здесь частные производные соответствующей весовой функции по измеренным величинам.

Функция (41) может быть представлена так:

$$\Delta U = -F_\beta \cdot \frac{Q_{14}}{Q_{11}} + \frac{Q_{24}}{N} (Q_{23} F_y - Q_{33} F_x) + \frac{Q_{34}}{N} (Q_{23} F_x - Q_{22} F_y).$$

После некоторых преобразований получим

$$\Delta U = -F_\beta \frac{Q_{14}}{Q_{11}} + \frac{F_x}{N} (Q_{23} Q_{34} - Q_{33} Q_{24}) + \frac{F_y}{N} (Q_{23} Q_{24} - Q_{22} Q_{34}). \quad (50)$$

Величины  $Q$  есть квадратические и неквадратические коэффициенты нормальных уравнений и уравнения (47); они зависят только от коэффициентов условных уравнений.

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{Q_{14}}{Q_{11}} &= (A); \quad \frac{1}{N} (Q_{23} Q_{34} - Q_{33} Q_{24}) = (B) \\ \frac{1}{N} (Q_{23} Q_{24} - Q_{22} Q_{34}) &= (C) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Тогда формулу (50) можно записать так:

$$\Delta U = (A) F_\beta + (B) F_x + (C) F_y. \quad (52)$$

Из уравнений (23) следует, что

$$F_\beta = f_\beta + F_\beta'; \quad F_x = f_x + F_x'; \quad F_y = f_y + F_y'.$$

При исследовании уравнения (52) можно пойти двумя путями. Если исходные данные безошибочны, то свободные члены можно выразить через ошибки измеренных величин. Тогда

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_1 \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2 + \alpha_3 \Delta_3 + \dots; \\ f_2 &= \beta_1 \Delta_1 + \beta_2 \Delta_2 + \beta_3 \Delta_3 + \dots; \\ f_3 &= \gamma_1 \Delta_1 + \gamma_2 \Delta_2 + \gamma_3 \Delta_3 + \dots; \end{aligned}$$

где  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  и т. д. — частные производные функции, соответствующей вычислению той или иной невязки или свободного члена уравнения. Подставив значения свободных членов в (52) и перейдя обычным порядком от истинных ошибок к средним квадратическим, получим формулу средней квадратической ошибки функции, пригодную для оценки точности уравновешенных элементов полигонометрического хода без учета ошибок исходных данных. Такие формулы найдены проф. А. С. Чеботаревым.

Воспользуемся уравнением (52) для оценки косвенного влияния ошибок исходных данных на функцию уравновешенных величин. Будем считать, что измерения безошибочны. Тогда свободные члены  $F_\beta, F_x$  и  $F_y$

являются результатом влияния ошибок исходных данных. Конечно, выразить их, как в предыдущем случае, через независимые величины — ошибки непосредственных измерений, послуживших для получения исходных данных, — задача громоздкая и вряд ли разрешимая, так как ошибки исходных данных в большинстве случаев являются зависимыми величинами.

Для проведения подобного исследования не обязательно переходить к средним квадратическим ошибкам, а достаточно исследовать функцию

$$\Delta U' = (A) F_{\beta}' + (B) F_x' + (C) F_y'. \quad (53)$$

Она получена из уравнения (52) путем выделения только той части, которая связана с влиянием ошибок исходных данных. Здесь коэффициенты пропорциональности  $(A)$ ,  $(B)$  и  $(C)$  те же, что и в предыдущем случае, когда исходные данные полагались безошибочными. Это так и должно быть, ибо деформация полигона в результате влияния разности ошибок исходных данных — косвенное влияние и происходит по тому же закону, что и образование поправок к измеренным величинам. Вычисление коэффициентов косвенного влияния ошибок исходных данных  $(A)$ ,  $(B)$  и  $(C)$  для конкретно запроектированного или уже проложенного хода не составит труда. Для этого нам надо вычислить коэффициенты  $Q$ . Для их вычисления используется таблица коэффициентов нормальных уравнений и весовые функции, составляемые для каждого элемента, влияние ошибок исходных данных на который надо изучить. От этих весовых функций берутся частные производные. Для простоты рассуждений будем считать, что полигонометрический ход вытянут и имеет равные стороны. Общность выводов от этого не нарушится, тем более, что вытянутые ходы на практике встречаются очень часто. Преимущества вытянутого хода известны.

Так как условные уравнения справедливы при любом положении осей координат, то повернем оси так, чтобы ось абсцисс расположилась по направлению замыкающей хода и совпадала с ней.

Новые оси координат назовем  $x''$  и  $y''$ . Центральные координаты, согласно существующим в геодезии правилам, назовем  $\eta''$  и  $\xi''$ . Дирекционные углы при новом положении осей обозначим через  $\alpha''$ , т. е. будем считать, что

$$\alpha_i'' = \alpha_i - \Theta, \quad (54)$$

где  $\Theta$  — дирекционный угол замыкающей. Условные уравнения (24) переписутся для нашего случая так:

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } [v''] + F_{\beta}'' &= 0 \\ \text{II. } [\cos \alpha'' w] + \frac{1}{\rho} [\eta'' v''] + F_x'' &= 0 \\ \text{III. } [\sin \alpha'' w] - \frac{1}{\rho} [\xi'' v''] + F_y'' &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (55)$$

где  $F_{\beta}''$ ;  $F_x''$  и  $F_y''$  — невязки при повернутых осях координат.

$$\begin{aligned} \alpha_1'' = \alpha_2'' = \alpha_3'' \dots = \alpha_n'' &= 0; \quad \cos \alpha'' = 1; \quad \sin \alpha'' = 0; \\ \eta_1'' = \eta_2'' = \eta_3'' = \dots = \eta_{n+1}'' &= 0; \quad s_1 = s_2 = s_3 = \dots = s_n = s; \\ sn &= L, \end{aligned}$$

где  $L$  — замыкающая.

Тогда условные уравнения принимают простой вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } [v''] + F_{\varphi}'' = 0 \\ \text{II. } [w] + F_x'' = 0 \\ \text{III. } -\frac{1}{\rho} [\xi'' v''] + F_y'' = 0 \end{array} \right\}. \quad (56)$$

Вычислим коэффициенты нормальных уравнений для этого случая

так как

$$\left. \begin{array}{l} Q_{11} = \frac{n+1}{\rho}; \quad Q_{12} = 0; \quad Q_{13} = 0; \\ [v] = [\xi] = 0 \\ Q_{22} = [s]; \quad Q_{33} = \frac{q}{\rho} [\xi''^2]; \quad Q_{23} = 0. \end{array} \right\}. \quad (57)$$

Все неквадратичные коэффициенты исчезают, а квадратичные значительно упрощаются.

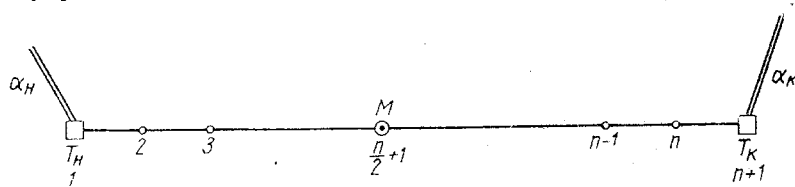


Рис. 2

В ходе с равными сторонами (рис. 2) для случая, когда  $n$  — число четное, центр тяжести хода располагается в вершине  $(\frac{n}{2} + 1)$ .

Подсчитав абсциссы всех точек хода, получим

$$\left. \begin{array}{l} -\xi_1'' = +\xi_{n+1}'' = \left(\frac{n}{2}\right) \cdot s \\ -\xi_2'' = +\xi_n'' = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot s \\ \dots \dots \dots \\ -\xi_i'' = +\xi_{n+2-i}'' = \left(\frac{n}{2} - i + 1\right) \cdot s \\ -\xi_{\frac{n}{2}}'' = +\xi_{\frac{n}{2}+2}'' = \left(\frac{n}{2} - \frac{n}{2} + 1\right) \cdot s = s \end{array} \right\}. \quad (58)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} [\xi''^2]_{n+1} &= 2s^2 \left\{ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \left(\frac{n}{2} - i + 1\right)^2 + \right. \\ &+ \dots + \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left. \right\} = 2s^2 \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(2\frac{n}{2} + 1\right) \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{s^2}{12} n(n+2)(n+1)}. \end{aligned} \quad (59)$$

В случае, если число сторон хода  $n$  нечетное, центр тяжести  $M$  находится в середине средней линии, и тогда абсциссы точек хода будут равны

$$\begin{aligned}
-\xi_1'' &= +\xi_{n+1}'' = \frac{n}{2} \cdot s, \\
-\xi_2'' &= +\xi_n'' = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot s, \\
&\dots \dots \dots \\
-\xi_i'' &= +\xi_{n-i+2}'' = \left(\frac{n}{2} - i + 1\right) \cdot s, \\
&\dots \dots \dots \\
-\xi_{\frac{n+1}{2}}'' &= +\xi_{\frac{n+3}{2}}'' = \frac{1}{2} \cdot s.
\end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned}
[\xi''^2]_1^{n+1} &= 2s^2 \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \right\} = \\
&= \frac{2s^2}{4} \left\{ 1^2 + 3^2 + \dots + (n-2)^2 + n^2 \right\} = \frac{s^2}{2} \left\{ \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \right. \\
&- [2^2 + 4^2 + \dots + (n-1)^2] \left. \right\} = \frac{s^2}{2} \left\{ \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) - 4[1^2 + 2^2 + \right. \\
&+ \dots + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2] \left. \right\} = \frac{s^2}{2} \left\{ \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) - \frac{4}{6} \left(\frac{n-1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right) (n) \right\} = \\
&= \frac{s^2}{12} n(n+1)(n+2),
\end{aligned}$$

т. е. в этом случае получился тот же результат (59), с учетом которого получим для коэффициента  $Q_{33}$

$$Q_{33} = \frac{q}{\rho} \cdot \frac{s^2}{12} n(n+1)(n+2). \quad (60)$$

Все остальные коэффициенты уравнения (44), представленные формулами (47), (48), (49), примут более простой вид, а именно:

$$\left. \begin{aligned}
Q_{14} &= \left[ \frac{f}{p} \right]_1^{n+1} \\
Q_{24} &= [sf]_{n+1}^{n+2+i} \\
Q_{34} &= -q[\xi''f]_1^{i+1} = -q \left[ fs \left( \frac{n}{2} - i + 1 \right) \right]_1^{i+1}
\end{aligned} \right\}. \quad (61)$$

Учитывая (57), (60) и (61), можно вычислить коэффициенты косвенного влияния (A), (B) и (C) для нашего случая

$$N = Q_{22} \cdot Q_{33} - Q_{23}^2 = \frac{q}{\rho} [s] \frac{s^2 n}{12} (n+1)(n+2).$$

Имея в виду, что

$$[s] = L = ns,$$

получим

$$N = \frac{q}{\rho} \cdot \frac{L^2 s}{12} (n+1)(n+2).$$

Согласно (51) найдем

$$(A) = -\frac{Q_{14}}{Q_{11}} = -\left[ \frac{f}{p} \right] \frac{p}{n+1} = -\frac{[f]}{n+1}; \quad (62)$$

$$(B) = \frac{1}{N} (Q_{23} \cdot Q_{34} - Q_{33} \cdot Q_{24}) = - \frac{Q_{32} Q_{24}}{Q_{22} Q_{33}} = - \frac{Q_{24}}{Q_{22}} = \frac{[sf]_{n+1}^{n+1+i}}{[s]}; \quad (63)$$

$$(C) = \frac{1}{N} (Q_{23} \cdot Q_{24} - Q_{22} \cdot Q_{34}) = - \frac{Q_{22} Q_{34}}{Q_{22} Q_{33}} = - \frac{Q_{34}}{Q_{33}} =$$

$$= 12 \rho \frac{\left[ fs \left( \frac{n}{2} - i + 1 \right) \right]}{s^2 n(n+1)(n+2)} = \frac{12 \rho \left[ f \left( \frac{n}{2} - i + 1 \right) \right]}{n \cdot s(n+1)(n+2)}. \quad (64)$$

Для определения коэффициентов косвенного влияния ошибок исходных данных на какой-либо элемент вытянутого полигонометрического хода с равными сторонами надо составить соответствующую весовую функцию. Для этого нужно найти частные производные по измеренным величинам и подставить их в формулы (62), (63), (64).

Рассмотрим косвенное влияние ошибок исходных данных на дирекционный угол  $i$ -й стороны вытянутого полигонометрического хода.

Составим весовую функцию. Вычислим дирекционный угол

$$\alpha_i = \alpha_H + \sum_1^i \beta_i - i 180^\circ.$$

Исправленные углы  $\beta$  в формуле заменим измеренными углами

$$\alpha_i = \alpha_H + \sum_1^i (\beta'_i + v_i) - i 180^\circ.$$

Поправка  $i$ -го дирекционного угла равна сумме поправок всех углов

$$\Delta \alpha_i = \Delta \alpha_H + \sum_1^i v_i.$$

Возьмем частные производные весовой функции по измеренным аргументам. Легко видеть, что

$$f_1 = f_2 = \dots = f_i = 1,$$

$$f_{n+1+i} = 0.$$

По формулам (62), (63), (64) вычислим коэффициенты косвенного влияния:

$$(A) = - \frac{[f]}{n+1} = - \frac{i}{n+1}$$

$$(B) = - \frac{[fs]_{n+1}^{n+1+i}}{[s]} = 0 \quad (\text{так как } Q_{24} = 0)$$

$$(C) = 12 \rho \frac{\left[ s \left( \frac{n}{2} - i + 1 \right) \right]}{s^2 n(n+1)(n+2)} = \frac{12 \rho \left[ \left( \frac{n}{2} - i + 1 \right) \right]_1^i}{ns(n+1)(n+2)},$$

где

$$\left( \left[ \frac{n}{2} - i + 1 \right]_1^i \right) = \frac{n}{2} + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) + \left( \frac{n}{2} - 2 \right) + \left( \frac{n}{2} - 3 \right) +$$

$$+ \dots + \left\{ \frac{n}{2} - (i-1) \right\} = \left( \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + \dots + \frac{n}{2} \right) - \{ 1 + 2 + 3 +$$

$$+ \dots + (i-1) \} = \frac{n}{2} i - \frac{1 + (i-1)}{2} (i-1) = \frac{ni}{2} -$$

$$- \frac{i}{2} (i-1) = \frac{i}{2} (n - i + 1)$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} c_i &= \left[ \frac{n}{2} - i + 1 \right]_1^i = \frac{i}{2} (n - i + 1) \\ a_i &= \frac{\sqrt{ci}(n-i+1)}{(n+1)(n+2)} \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Величину  $a$  можно не вычислять, так как для нее проф. А. С. Чеботаревым составлены таблицы\*.

С учетом сделанных преобразований найдем

$$(C) = \rho \frac{a_i}{ns} \quad \text{или} \quad (C) = \frac{\rho}{L} a_i.$$

Окончательная формула, выражающая косвенное влияние ошибок исходных данных на дирекционный угол хода с номером  $i$ , получит вид

$$\Delta U_{\alpha_i} = -\frac{i}{n+1} F_{\beta}'' + \frac{\rho}{L} a_i F_{\gamma}'' \quad (67)$$

Нетрудно вывести формулу для учета косвенного влияния ошибок исходных данных на точность определения координат вытянутого равно-стороннего хода.

Уравнения (22) дают формулы, выражающие величину влияния ошибок исходных данных на координаты\*\*.

Примем, что

$$-F_x = \Delta U_x,$$

$$-F_y = \Delta U_y.$$

Для хода произвольной формы имеем

$$\Delta U_x = [\cos \alpha \omega]_{n+2}^{i+n+2} + \frac{1}{\rho} [\eta v'']_1^{i+1};$$

для вытянутого хода при повернутых осях координат имеем

$$\Delta U_x = [\omega]; \quad \Delta U_y = -\frac{1}{\rho} [\xi'' v'']. \quad (68)$$

Рассмотрим сначала косвенное влияние ошибок исходных данных на абсциссы точек нашего хода. Частные производные будут равны

$$f_1 = f_2 = \dots = f_{n+1} = 0,$$

$$f_{n+2} = f_{n+3} = \dots = f_{n+2+i} = 1.$$

По формулам (62), (63), (64) вычислим коэффициенты

$$(A) = 0, \quad \text{так как } Q_{14} = 0,$$

$$(B) = -\frac{1}{L} [fs]_{n+2}^{n+2+i} = -\frac{si}{sn} = \frac{i}{n},$$

$$(C) = 0, \quad \text{так как } Q_{34} = 0.$$

Формула (53) для абсцисс может быть написана так:

$$\Delta U_x = -\frac{i}{n} F_x''. \quad (69)$$

\* «Геодезист», № 2—3, 1962, стр. 97—98.

\*\* Для простоты расчетов возьмем не полное число сторон в ходе  $n$ , а  $i$  сторон.



В случае ординат получим коэффициенты

$$(A) = \frac{S}{\rho} \cdot \frac{(c_i + i)}{n+1}; \quad (70)$$

$$(C) = -\frac{i}{n} \cdot \frac{i+1}{n+1} \cdot \frac{i+2}{n+2}; \quad (71)$$

$$(B) = 0, \text{ так как } Q_{24} = 0. \quad (72)$$

Применив формулу (53), получим выражение ошибки ординаты точки хода с номером  $(i+1)$ , вызванной косвенным влиянием ошибок исходных данных, которое запишем в следующем виде:

$$\Delta U_y = \frac{s}{\rho} \cdot \frac{(i+c_i)}{n+1} F_{\beta}'' - \frac{i}{n} \cdot \frac{i+1}{n+1} \cdot \frac{i+2}{n+2} \cdot F_y''. \quad (73)$$

Интересно также рассмотреть и косвенное влияние ошибок исходных данных на длины линий хода.

Как известно, линии полигонометрического хода получают поправки, вычисленные в общем случае по формулам (37)

$$w_i = \Delta x_i k_2 + \Delta y_i k_3.$$

Величина  $w_i$  в данном случае и есть нужное нам приращение исследуемой функции  $\Delta U_{s_i}$ . С учетом формул (33) и (34)

$$\begin{aligned} \Delta U_{s_i} &= \Delta x_i \frac{1}{N} (Q_{23} F_y - Q_{33} F_x) + \Delta y_i \frac{1}{N} (Q_{23} F_x - Q_{22} F_y) = \\ &= \frac{1}{N} (Q_{23} \Delta y_i - Q_{33} \Delta x_i) F_x + \frac{1}{N} (Q_{23} \Delta x_i - Q_{22} \Delta y_i) F_y. \end{aligned}$$

После поворота осей координат на угол  $\Theta$  получим

$$\Delta U_{s_i} = -\frac{1}{N} Q_{33} \Delta x_i'' F_x'' + \frac{1}{N} Q_{23} \Delta x_i'' \cdot F_y''.$$

Для вытянутого хода найдем

$$Q_{23} = 0; \quad Q_{33} = \frac{q}{\rho} [\xi'^2]; \quad N = \frac{q}{\rho} [s] [\xi'^2].$$

Окончательно для  $\Delta U_s$  получим

$$\Delta U_s = -\frac{s}{L} F_x''. \quad (74)$$

Таким образом найдены формулы для учета косвенного влияния ошибок исходных данных на точность определения элементов вытянутого хода с равными сторонами. К ним присоединим формулы, выражающие те части невязок, которые вызваны косвенным влиянием ошибок исходных данных. Для этого используем уравнения (23). При этом учтем, что сделан поворот осей на дирекционный угол замыкающей хода, и центр тяжести хода расположен в середине его. Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} F_{\beta}'' &= \delta \alpha_K'' - d \alpha_H \\ F_x'' &= -\delta X_U'' \\ F_y'' &= -\frac{L}{2\rho} (\delta'' \alpha_H + \delta'' \alpha_K) - \delta Y_U'' \end{aligned} \right\}. \quad (75)$$

Для коэффициентов  $a_i$ ,  $c_i$  и  $(C)$ , зависящих только от числа сторон в ходе  $n$  и номера оцениваемого элемента  $i$ , можно составить таблицу,

причем для вычисления  $a_i$ , как уже было указано, можно воспользоваться таблицей, составленной проф. А. С. Чеботаревым.

Производя соответственно анализ формул (67), (75); (69), (75); (73), (75), приходим к следующему выводу.

I. Индивидуальные ошибки исходных дирекционных углов распределяются на дирекционные углы хода равномерно, пропорционально их номерам, вызывая наибольшее отклонение хода в его конце и искривление в середине.

Составляющая этой ошибки по оси ординат вызывает ошибку в дирекционных углах, пропорциональную коэффициенту  $a_i$ , т. е. искажение постепенно растет к середине хода, а затем снова убывает к концу. В длинных ходах это искажение носит несколько более плавный характер.

II. Относительно косвенного влияния ошибок исходных данных на абсциссу точки хода следует сказать, что ошибка исходных дирекционных углов на абсциссу равна нулю. Влияние составляющей ошибки по оси ординат на абсциссу также равно нулю. Составляющая этой ошибки по оси абсцисс распределяется равномерно на все абсциссы точек хода, вызывая максимальный сдвиг в его конце.

III. Исследуя косвенное влияние ошибок исходных данных на ординату точки хода, приходим к выводу, что ошибки в исходных дирекционных углах вызывают сдвиги всех точек хода в направлении оси ординат. Этот сдвиг достигает наибольшей величины в середине хода. Нарастание сдвига в первой половине хода происходит медленнее, чем его убывание во второй половине. В длинных ходах сдвиг больше, чем в коротких.

Составляющая  $\delta X_U''$  на ординату никакого влияния не оказывает. Влияние же  $\delta Y_U''$  пропорционально отношению

$$\frac{i^3 + 2i^2 + 2i}{n^3 + 2n^2 + 2n}.$$

IV. Рассмотрение формулы (74) приводит к выводу, что та часть продольной невязки, которая вызвана ошибками исходных данных, распределяется пропорционально длинам линий, т. е. вызывает масштабную ошибку всего хода. Правда, такое распределение продольной невязки будет справедливым, когда в измерениях линий имеется заметная систематическая ошибка постоянного характера.

#### ЛИТЕРАТУРА

Изотов А. А. Оценка точности элементов окончательно уравненной цепи триангуляции. Журн. «Геодезист», № 2, М., Геодезиздат, 1935.

Пранис-Праневич И. Ю. Определение средней квадратической ошибки функции с учетом ошибок исходных данных при уравнивании по способу наименьших квадратов. Сборник № 5. Исследования по геодезии. ЦНИИГАиК, М., Геодезиздат, 1939.

Селиханович В. Г. К вопросу о методах учета ошибок исходных данных при уравнивании измеренных величин. Тр. МИИГАиК, вып. 9, М., Геодезиздат, 1951.

Селиханович В. Г. Влияние ошибок исходных данных на элементы схематической цепи триангуляции. Тр. МИИГАиК, М., Геодезиздат, вып. 12, 1952.

Чеботарев А. С. Оценка точности полигонометрических ходов с учетом ошибок исходных данных. Тр. МИИГАиК, вып. 1, М., Геодезиздат, 1940.

Чеботарев А. С. Уравнивание вычисления при полигонометрических работах. М., 1934.

Чеботарев А. С. Уравнивание вытянутого полигонометрического хода. Журн. «Геодезист», № 2—3, М., Геодезиздат, 1932.

ТРУДЫ МОСКОВСКОГО ИНСТИТУТА ИНЖЕНЕРОВ ГЕОДЕЗИИ,  
АЭРОФОТОСЪЕМКИ И КАРТОГРАФИИ

Выпуск 25

1957 г.

Кафедра геодезии

Кандидат техн. наук В. П. Козлов

**О СОВМЕСТНОМ УРАВНОВЕШИВАНИИ НИВЕЛИРНЫХ  
СЕТЕЙ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ**

В геодезической практике опорные сети строят последовательными очередями, причем элементы предыдущих построений являются исходными по отношению к элементам последующего построения. Так как исходные данные получаются с той или иной погрешностью, то дополнительные условия, вызванные избыточным числом исходных данных, превращаются в «принудительные условия», которым должны подчиняться результаты измерений, независимо от степени точности самих измерений. Свободные члены условных уравнений, а следовательно, и поправки в измеренные величины или их функции зависят как от ошибок измерений, так и от ошибок исходных данных.

В результате уравнивания поправки в измеренные величины искажаются влиянием разностей ошибок исходных данных. Влияние такого рода ошибок носит в основном систематический характер, и применение способа наименьших квадратов при уравнивании результатов измерений, а также использование обычных методов оценки точности уравновешенных элементов и их функций становятся при этих условиях не совсем законными.

Надежность результатов уравниваемой сети по способу наименьших квадратов зависит от соотношения величин ошибок измерений и ошибок исходных данных. Применение способа наименьших квадратов без учета влияния ошибок исходных данных приводит к формальному устранению разногласий результатов измерений между собою и с исходными данными и не решает вопроса о получении окончательных значений неизвестных с наибольшим весом. Правильная постановка задачи по оценке точности уравниваемых элементов должна исходить из раздельного учета влияния ошибок измерений и ошибок исходных данных. Сложность этой задачи заключается в том, что те и другие ошибки неизвестны и не отделимы одна от другой в процессе уравнивательных вычислений. В связи с повышением точности и качества непосредственных измерений, а также с увеличением требований к точности уравниваемых элементов вопрос об ошибках исходных данных приобретает особое значение. В литературе по этому вопросу есть ряд выдающихся работ, например, исследования проф. Ф. Н. Красовского, проф. А. С. Чеботарева, проф. Н. А. Урмаева, проф. А. А. Изотова, инж. И. Ю. Пранис-Праневича, инж. Д. А. Ларина, доц. В. Г. Селиханович, канд. техн. наук М. Х. Музафарова. В этих работах вопросы оценки точности триангуляции, полигонометрии и нивелировки с учетом влияния ошибок исходных данных были глубоко проанализированы и получили достойное решение. Предлагаемые советскими учеными методы учета ошибок исходных данных научно решили задачу о выявлении величины деформации уравниваемых сетей под влиянием ошибок исходных данных. Однако

другая практическая задача, а именно, задача исключения влияния ошибок исходных данных из значений поправок в измеренные величины и их функции, к сожалению, еще не решена. Теоретически строгое решение этой задачи требует проведения совместного уравнивания сетей различных очередей (классов) построения. Совместное уравнивание, в свою очередь, вызывает необходимость постановки вопроса о правильном выборе весов, что тесно связано с решением проблемы об оценке точности непосредственных измерений. Автор ограничился рассмотрением вопроса о совместном уравнивании нивелирных сетей II, III и IV классов, но выводы, полученные им, могут быть в некоторой мере использованы и для других видов геодезических сетей.

#### Об оценке точности нивелирования II, III, IV классов

Академик А. И. Ляпунов в 1900 г., развивая теоремы академиков П. Л. Чебышева и А. А. Маркова, доказал, что если имеется ряд случайных независимых величин, у каждой из которых свое распределение, и если ни одна из них резко не превышает другие, то функция распределения суммы случайных величин стремится к нормальному распределению.

Советский академик С. Н. Бернштейн, развивая далее центральную предельную теорему теории вероятности, показал, что если между величинами имеется слабая корреляционная связь, то и тогда функция распределения суммы этих величин с ростом числа слагаемых стремится к нормальному распределению. Теорема С. Н. Бернштейна имеет большое значение для вопроса оценки точности нивелирных полигонов по их невязкам, ибо в этом случае невязки соседних полигонов являются слабо зависимыми величинами.

Суммарная ошибка превышения является функцией большого числа систематических и случайных ошибок. Влияние систематических ошибок на суммарную ошибку в превышении при правильной организации работ значительно меньше влияния случайных ошибок. Совместное влияние систематических ошибок различных источников может быть несколько компенсировано различием характера их действий.

Учитывая изложенное выше и принимая во внимание центральную предельную теорему теории вероятности, можно утверждать, что суммарные ошибки в превышениях, как правило, имеют нормальное распределение. Так, из 257 линий, вошедших в первый и второй тома каталога высот марок и реперов нивелирования I и II классов (Геодезиздат, 1949, 1950), только 14 линий имеют систематическое распределение знаков разностей превышений прямого и обратного ходов ( $\Delta$ ), тогда как в остальных 243 линиях отрицательные и положительные  $\Delta$  встречаются одинаково часто. Чем больше абсолютное значение  $\Delta$ , тем такая разность встречается реже; видимой закономерности по величине и знаку в распределении  $\Delta$  не наблюдается. Это обстоятельство позволило предположить, что и невязки в полигонах также будут иметь нормальное распределение. Для анализа были использованы невязки 100 полигонов, образующих основную нивелирную сеть СССР. Была установлена корреляционная зависимость между абсолютными значениями невязок и периметрами полигонов. Полученный коэффициент корреляции  $r = +0,27$  показал, что в основном величины невязок можно считать следствием ошибок случайного характера.

Рассматривая невязки в нивелирных полигонах как истинные ошибки и принимая за веса невязок величины, обратные периметрам полигонов, значение средней квадратической величины невязки можно принять равной

$$m_f = \sqrt{\frac{[f^2] L_{\text{ср}}}{N}}, \quad (1)$$

где  $f$  — невязка в полигоне,  $L$  — периметр полигона,  $N$  — число полигонов,  $L_{\text{ср}}$  — средняя величина периметра.

Подсчитаем теоретическое распределение невязок в различных интервалах для случая нормального распределения.

Вероятность появления невязки в интервале  $-f$  —  $+f$  определяется формулой

$$P_{-f \rightarrow +f} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-f}^{+f} e^{-h^2 f^2} \cdot df = \Phi(g), \quad (2)$$

где

$$g = h \cdot f, \quad h = \frac{1}{m_f \sqrt{2}}.$$

Величина  $m_f$ , полученная по формуле (1), оказалась равной  $\pm 115$  мм.

Теоретическое и фактическое распределение невязок представлено в табл. 1.

Таблица 1

Интервал, мм	Теоретич. число невязок	Фактич. число невязок	Разность фактич. — теоретич.
0 — ± 25	17	18	+ 1
± 26 — ± 75	31	32	+ 1
± 76 — ± 125	24	21	— 3
± 126 — ± 175	15	17	+ 2
± 176 — ± 225	8	8	0
> 225	5	4	— 1
	100	100	

По невязкам в полигонах было найдено вероятное значение невязки  $r_f = \pm 76$  мм и среднее значение невязки

$$v_f = \frac{[f]}{N} = \pm 92 \text{ мм.}$$

С другой стороны, из теории ошибок известно, что

$$\left. \begin{aligned} r &= 0,67 \cdot m \\ v &= 0,80 \cdot m \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Приняв  $m_f = \pm 115$  мм, по формулам (3) получили  $r_f = \pm 77$  мм,  $v_f = \pm 92$  мм.

Табл. 1 и установленные соответствия между теоретическими и практическими значениями вероятной, средней и средней квадратической ошибками убеждают в том, что невязки в нивелирных полигонах являются в основном следствием влияния случайных ошибок и что распре-

деление невязок весьма близко подходит к нормальному распределению. Это обстоятельство позволяет представить накопление невязок в нивелирных ходах или полигонах формулой

$$m = \lambda \sqrt{L}, \quad (4)$$

где  $\lambda$  — средняя квадратическая ошибка на 1 км хода, обусловленная совместным действием случайных и систематических ошибок. Используя невязки в полигонах, можно определить  $\lambda$  по формулам

$$\lambda = \sqrt{\frac{[f^2]}{[L]N}} \quad (5)$$

и

$$\lambda = \sqrt{\frac{[f^2]}{[L]}} \quad (\text{приближенное значение } \lambda). \quad (6)$$

В результате вычисления величин  $\lambda$  по формулам (5) и (6) для случая 100 полигонов получены соответственно значения  $\pm 3,1$  мм,  $\pm 3,4$  мм. Величина  $\lambda$  является сложной функцией ошибок, имеющих место при нивелировании. Вид этой функции можно установить только путем изучения отдельных источников ошибок, путем проведения опытных наблюдений разными инструментами в различных условиях.

Для линий II класса за среднее приближенное значение  $\lambda$  можно принять  $\pm 3$  мм.

В табл. 2 дано сравнение теоретического числа невязок, превышающих предельное значение (для 100 полигонов), с действительным их числом (для случая нормального распределения).

Соответствие действительного числа невязок, превышающих предельное значение, теоретическому числу указывает опять-таки на нормальное распределение и на справедливость формул для подсчета предельных значений невязок, приведенных в табл. 2.

Таблица 2

Интервал	Вероятность появления невязок в интервале	Число невязок свыше данного предела (на 100 невязок)		Формула для вычисления $f_{\text{пред}}$
		теоретическое	действительное	
$m$	0,681	32	42	$\pm 3 \text{ мм } \sqrt{L}$
$1,5 m$	0,864	14	18	$\pm 4,5 \text{ мм } \sqrt{L}$
$2,0 m$	0,954	5	4	$\pm 6,0 \text{ мм } \sqrt{L}$
$2,5 m$	0,987	1	1	$\pm 7,5 \text{ мм } \sqrt{L}$
$3,0 m$	0,997	0	1	$\pm 9 \text{ мм } \sqrt{L}$

В том случае, когда имеется небольшое число измерений, целесообразно для определения предельных ошибок использовать формулу  $\Delta_{\text{пр}} = 2m$ . Эта формула находит широкое применение в геодезической практике СССР, поэтому можно рекомендовать соотношение

$$f_{\text{пр}} = 2\lambda \sqrt{L}. \quad (7)$$

Приняв для линий II класса за среднее приближенное значение  $\lambda \pm 3,0$  мм, рабочую формулу для вычисления предельных невязок по линиям или полигонам можно представить в виде:

$$\text{для II класса } f_{\text{пр}} = \pm 6 \text{ мм} \sqrt{L}. \quad (8)$$

Инструкция по нивелированию I, II, III и IV классов (Геодезиздат, 1955) рекомендует оценку точности проводить по формулам

$$\left. \begin{aligned} \text{для II класса } f_{\text{пр}} &= \pm 5 \text{ мм} \sqrt{L} \\ \text{„ III класса } f_{\text{пр}} &= \pm 10 \text{ „ } \sqrt{L} \\ \text{„ IV класса } f_{\text{пр}} &= \pm 20 \text{ „ } \sqrt{L} \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Формула (8) подтверждает эти рекомендации относительно нивелирования II класса, а анализ основной нивелирной сети СССР указывает, что нивелирные линии II класса, вошедшие в каталог высот марок и реперов нивелирования I и II классов (Геодезиздат, 1949, 1950), в подавляющем большинстве удовлетворяют требованиям указанной инструкции.

При оценке точности нивелирования II, III и IV классов для исключения ошибок исходных данных целесообразно использовать невязки в замкнутых полигонах и предельное их значение вычислять по следующим формулам:

1) для полигонов II класса

$$f_{\text{пр}} = \pm 5 \text{ мм} \sqrt{[L]_n}, \quad (10)$$

где  $L_1, L_2, \dots, L_n$  — линии II класса, составляющие полигон (в том случае, когда отдельная линия прокладывается между твердыми пунктами, оценку следует производить также по замкнутому полигону, учитывая измеренные превышения ранее уравнированных линий, из которых получены отметки твердых пунктов);

2) для полигонов III класса

$$\left. \begin{aligned} f_{\text{пр}} &= \sqrt{100[L]_{\text{III кл}} + 25[L]_{\text{II кл}}} \\ \text{3) для полигонов IV класса} \\ f_{\text{пр}} &= \sqrt{400[L]_{\text{IV кл}} + 100[L]_{\text{III кл}} + 25[L]_{\text{II кл}}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(при оценке нивелирования III класса в замкнутые полигоны включаются участки линий II класса, а при оценке нивелирования IV класса — участки линий II и III классов).

#### О совместном уравнивании нивелирных сетей II, III и IV классов

Согласно Инструкции по вычислениям триангуляций и нивелировок, часть II, издание ГУГК 1951 г., полагается уравнивательные вычисления проводить отдельно по классам.

Распределение поправок по линиям имеет часто неблагоприятный характер для последующего уравнивания. Это затрудняет оценку точности отдельных линий по их невязкам и может привести к ошибочным выводам о качестве полевых наблюдений.

Для уменьшения влияния ошибок исходных данных необходимо проводить совместное уравнивание нивелирных линий всех классов (за исключением ранее уравнированных граничных линий полигонов, составляющих основную сеть I и II классов СССР).

При совместном уравнивании, исходя из общей формулы веса

$$P = \frac{c}{m^2},$$

а также равенств

$$\lambda^2_{II \text{ кл}} L_{II \text{ кл}} = \lambda^2_{III \text{ кл}} L_{III \text{ кл}} = \lambda^2_{IV \text{ кл}} L_{IV \text{ кл}},$$

для удобства следует линии II, III и IV классов заменять эквивалентными линиями другого класса и вес вычислять по формуле

$$P = \frac{c}{L_9}, \quad (12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} L_9 &= L_{II \text{ кл}} \\ L_9 &= \frac{\lambda^2_{III \text{ кл}}}{\lambda^2_{II \text{ кл}}} L_{III \text{ кл}} \\ L_9 &= \frac{\lambda^2_{IV \text{ кл}}}{\lambda^2_{II \text{ кл}}} L_{IV \text{ кл}} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} L_9 &= L_{III \text{ кл}} \\ L_9 &= \frac{\lambda^2_{II \text{ кл}}}{\lambda^2_{III \text{ кл}}} L_{II \text{ кл}} \\ L_9 &= \frac{\lambda^2_{IV \text{ кл}}}{\lambda^2_{III \text{ кл}}} L_{IV \text{ кл}} \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

или, учитывая численные значения  $\lambda$  в формулах (9),

$$\left. \begin{aligned} L_9 &= L_{II \text{ кл}} \\ L_9 &= 4 L_{III \text{ кл}} \\ L_9 &= 16 L_{IV \text{ кл}} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} L_9 &= 0,25 L_{II \text{ кл}} \\ L_9 &= L_{III \text{ кл}} \\ L_9 &= 4 L_{IV \text{ кл}} \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Заменяв длины ходов II, III и IV классов эквивалентными ходами, можно рассматривать данную сеть как бы состоящей из ходов одного класса и проводить совместное уравнивание.

При совместном уравнивании средние квадратические ошибки всех уравновешенных элементов и их функций уменьшаются по сравнению с отдельным уравниванием по классам. Среднее повышение точности можно представить отношением

$$\frac{\sqrt{M^2_{\text{разд}} - M^2_{\text{совм}}}}{M_{\text{разд}}}, \quad (15)$$

где

$$M_{\text{совм}} = \sqrt{\left( \frac{1}{z} m_H^2 + \frac{t}{n} \varepsilon^2 L_{\text{ср}} \right)_{\text{совм}}}$$

$$M_{\text{разд}} = \sqrt{\left( \frac{1}{z'} m_{H'}^2 + \frac{t'}{n'} \varepsilon^2 L'_{\text{ср}} \right)_{\text{разд}}},$$

$z$  — число исходных данных,

$m_H$  — средняя квадратическая ошибка в отметках исходных пунктов,

$t$  — число необходимых измерений,

$n$  — число всех измерений,

$L_{\text{ср}}$  — среднее расстояние от исходных пунктов до средней точки системы,

$\varepsilon$  — коэффициент, характеризующий совместное влияние случайных и систематических ошибок.

Штрихи указывают, что данные величины берутся для системы, уравниваемой отдельно от общей. Если в общем виде вычисление длин эквивалентных ходов производилось по формулам:

$$\left. \begin{aligned} L_9 &= \alpha_1 L_{II \text{ кл}} \\ L_9 &= \alpha_2 L_{III \text{ кл}} \\ L_9 &= \alpha_3 L_{IV \text{ кл}} \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$



то средние квадратические ошибки на 1 км хода равны:

$$m_{\text{э, 1 км}} = \frac{\mu_{\text{э}}}{\sqrt{c}},$$

$$m_{\text{II кл, 1 км}} = m_{\text{э, 1 км}} \sqrt{\alpha_1},$$

$$m_{\text{III кл, 1 км}} = m_{\text{э, 1 км}} \sqrt{\alpha_2},$$

$$m_{\text{IV кл, 1 км}} = m_{\text{э, 1 км}} \sqrt{\alpha_3}.$$

Здесь  $\mu_{\text{э}}$  — средняя квадратическая ошибка единицы веса, полученная по формулам:

а) при посредственных измерениях

$$\mu_{\text{э}} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-t}};$$

б) при условных измерениях

$$\mu_{\text{э}} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{u}},$$

где  $p$  — вес нивелирного хода,  $v$  — поправка из уравнивания,  $n$  — число нивелирных линий,  $t$  — число узловых пунктов,  $u$  — число независимых условий.

Средняя квадратическая ошибка функции равна

$$M_{\phi} = \frac{\mu_{\text{э}}}{\sqrt{P_{\phi}}}.$$

Вычисление  $P_{\phi}$  производится по способам, изложенным в курсах геодезии и способа наименьших квадратов.

Оценка точности уравновешенных элементов и их функции при совместном уравнивании дает более реальные результаты, чем при раздельном. Решение нормальных уравнений при совместном уравнивании нивелирных сетей требует времени не больше, чем решение отдельных систем данной сети при раздельном ее уравнивании по классам.

Для подтверждения указанных выше выводов автором было произведено совместное уравнивание нивелирных линий, проложенных в полигоне № 31.

Нивелирные линии II, III и IV классов были уравновешены по способу условных измерений. Граничные линии полигона, являющиеся линиями основной нивелирной сети СССР, принимались за жесткие и в уравнивание не включались. В результате уравнивания были получены значения высот 57 узловых пунктов, а также значения поправок в измеренные превышения для 100 линий.

Попутно с определениями значений неизвестных при совместном уравнивании были вычислены веса ряда узловых пунктов и средние квадратические ошибки отметок этих пунктов. Эти же линии II, III и IV классов, проложенные в полигоне № 31, были уравновешены в 1948—1949 гг. Центральной вычислительной частью МАГП ГУГК. Уравнивание было выполнено раздельно по классам в соответствии с действующей в то время инструкцией. Из сопоставлений результатов раздельного и совместного уравниваний нивелирных линий полигона № 31 были получены следующие выводы.

1) Следствием совместного уравнивания явилось уменьшение квадрата средних квадратических ошибок отметок всех узлов в среднем

на 45 % по сравнению с раздельным (по классам) уравниванием.

2) Максимальное расхождение высот, полученных из совместного и раздельного уравниваний

для пунктов II класса  $2 \text{ мм} \pm 0,7 \text{ мм}$ ,

" " III "  $25 \text{ мм} \pm 0,7 \text{ мм}$ ,

" " IV "  $60 \text{ мм} \pm 7 \text{ мм}$ .

3) Максимальное расхождение поправок в превышения, полученных из совместного и раздельного уравниваний, достигает следующих величин:

а) линии II класса  $0,06 \text{ мм}$  на  $1 \text{ км}$  хода

б) " III "  $0,67 \text{ мм}$  "  $1$  " "

в) " IV "  $2,75 \text{ мм}$  "  $1$  " "

4) Наибольшее повышение веса при совместном уравнивании относится к пунктам III класса.

5) Время, необходимое на совместное уравнивание линий II, III и IV классов, не превышает времени, затрачиваемого на раздельное уравнивание по классам.

Суммарная ошибка измеренного превышения является функцией большого числа систематических и случайных ошибок. При правильной организации работ влияние систематических ошибок на суммарную ошибку в превышении значительно меньше влияния случайных ошибок. Суммарные ошибки в превышениях, а также невязки в замкнутых и разомкнутых полигонах имеют распределение, близкое к нормальному.

Нахождение наиболее надежных значений отметок реперов и оценка точности измеренных и уравновешенных элементов требуют проведения совместного уравнивания нивелирных сетей различных классов. Применение способа наименьших квадратов при совместном уравнивании нивелирных сетей различных классов обеспечивает получение наиболее надежных результатов при условии равных весов как при раздельном, так и при совместном уравнивании. При совместном уравнивании средние квадратические ошибки всех уравниваемых элементов и их функций уменьшаются по сравнению со средними квадратическими ошибками, полученными при раздельном уравнивании.

Исходя из того, что требования, предъявляемые к высотной основе, с каждым годом повышаются, совместное уравнивание нивелирных линий различных классов должно найти производственное применение и особенно в тех организациях, которые ведут работу на ограниченных площадях и создают высотную опорную сеть из нивелирных ходов различного класса.

ТРУДЫ МОСКОВСКОГО ИНСТИТУТА ИНЖЕНЕРОВ ГЕОДЕЗИИ,  
АЭРОФОТОСЪЕМКИ И КАРТОГРАФИИ

Выпуск 25

1957 г.

Кафедра геодезии

Доцент кандидат техн. наук Л. А. Башлаев

### НОВЫЙ МЕТОД НИВЕЛИРОВАНИЯ III КЛАССА

В настоящее время, по мнению автора, целесообразно от старого метода нивелирования III класса, при котором превышения определяются из отсчетов по трем нитям сетки, перейти к новому методу, согласно которому можно ограничиться лишь отсчетами по средней нити. Для контроля равенства расстояний между нивелиром и каждой из реек на станции предусматривается при наблюдении черных сторон отсчитывать только по одной из двух крайних нитей, а именно по той, которая в поле зрения трубы отстоит дальше от поверхности земли, чем другие нити.

Таким образом, согласно предлагаемому методу на одной станции достаточно произвести два отсчета по средней и два отсчета по одной из крайних нитей при наблюдении черных сторон реек и два отсчета по средней нити при наблюдении красных сторон реек.

Для полевых записей результатов наблюдений предлагается следующая форма журнала.

#### Журнал нивелирования III класса

Дата \_\_\_\_\_

Погода \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ час. \_\_\_\_\_ мин.

Изображение \_\_\_\_\_

№ шт.	Дальн.	Контр. черн.	Рейки	Черн.	Красн.	Контр.
7	187 (3)	1571 (2)	з	1384 (1)	6171 (12)	4787 (13)
	188 (6)	739 (5)	п	551 (4)	5239 (4)	4688 (11)
	—1/—1 (7)	+832 (8)	пр.	+833 (9)	+932 (15)	+ 99 (14)
8	186	2120	з	1934	6621	4687
	188	2196	п	2008	6796	4788
	—2/—3	—76	пр.	—74	—175	—101
12						
Контр. суммы	1086	13218	з	12132	40554	
	1089	9829	п	8740	37160	
	— 3	+3389	пр.	+3392	+3394	+ 2

4\*

51

Порядок записи отсчетов и вычислений на одном штативе показан цифрами, заключенными в скобки.

На каждой странице можно разместить результаты наблюдений на шести штативах и осуществить все необходимые вычисления.

Величины постраничного контроля представляют собою суммы соответствующих величин, взятых из каждого штатива.

Обратимся к расчету точности определения превышений на одной станции для обоих методов нивелирования. Расчет точности выполняется с учетом лишь таких источников ошибок, которые оказывают наибольшее влияние на точность превышения и вместе с тем ограничение влияния которых связано с методом наблюдений на станции. Такими источниками ошибок являются ошибки отсчетов по рейкам и ошибки установок нивелира по уровню.

Найдем формулу точности превышения на одной станции нивелирования III класса при наблюдениях по старому методу.

С этой целью вначале определим среднюю квадратическую ошибку превышения, зависящую только от ошибок отсчетов по рейкам, и среднюю квадратическую ошибку превышения, зависящую только от ошибок установки уровня, а затем найдем общую ошибку превышения, обусловленную ошибками взглядов по рейкам, то есть

$$m_{h(\text{взгл})}^2 = m_{h(\text{отсч})}^2 + m_{h(\text{ур})}^2. \quad (1)$$

Средняя квадратическая ошибка превышения есть ошибка функции отсчетов по рейкам

$$h_{(\text{отсч})} = \frac{3_{\text{ч}} + 3_{\text{ч}} + 3_{\text{ч}} - \text{п}_{\text{ч}} - \text{п}_{\text{ч}} - \text{п}_{\text{ч}} + 3_{\text{к}} - \text{п}_{\text{к}}}{4}, \quad (2)$$

где  $3_{\text{ч}}$  — отсчет по черной стороне задней рейки,

$\text{п}_{\text{ч}}$  — „ „ „ „ передней „ ,

$3_{\text{к}}$  — „ „ красной „ задней „ ,

$\text{п}_{\text{к}}$  — „ „ „ „ передней „ .

Полагая среднюю квадратическую ошибку отсчета по любой из трех нитей одинаковой, получим

$$m_{h(\text{отсч})}^2 = \frac{8 m_0^2}{16} = \frac{m_0^2}{2}. \quad (3)$$

Принимая во внимание, что средняя квадратическая ошибка отсчета по рейке может быть представлена выражением

$$m_0 = \pm \left( 0,03 t + 0,20 \frac{S}{v} \right) \text{ мм}^*, \quad (4)$$

где  $t$  — интервал деления рейки в миллиметрах,  $S$  — длина визирного луча в метрах,  $v$  — увеличение зрительной трубы нивелира, при  $t = 10 \text{ мм}$  найдем

$$m_{h(\text{отсч})}^2 = \frac{\left( 0,30 + 0,20 \frac{S}{v} \right)^2}{2} = \left( 0,212 + 0,141 \frac{S}{v} \right)^2. \quad (5)$$

Выразим превышение как функцию отсчетов (или групп отсчетов) по рейкам, производимых после соответствующих установок уровня.

\* См. диссертацию Л. А. Башлапина на соискание ученой степени кандидата технических наук «Вопросы нивелирования III класса» 1951 г.

Имеем

$$h_{(ур)} = \frac{3z_q - 3п_q + z_k - п_k}{4}. \quad (6)$$

Обозначив ошибку установки уровня через  $m_{ур}$ , получим

$$m_{h(ур)}^2 = \frac{20 m_{ур}^2}{16} = 1,25 m_{ур}^2. \quad (7)$$

Принимая во внимание, что средняя квадратическая ошибка установки уровня при помощи подъемных винтов нивелира в полевых условиях может быть представлена формулой

$$m_{ур} = \pm 0,10 \text{ деления}^*, \quad (8)$$

найдем

$$m_{h(ур)}^2 = 1,25 \left( \frac{0,1 \tau S 10^3}{\rho} \right)^2, \quad (9)$$

где  $\tau$  — цена деления уровня, выраженная в угловой мере,

$S$  — длина визирного луча в метрах.

Следовательно, точность превышения, определяемого на одной станции по старому методу нивелирования III класса, обусловленная ошибками взглядов, выражается формулой

$$m_{h(взгл)}^2 = \left( 0,212 + 0,141 \frac{S}{v} \right)^2 + 1,25 \left( \frac{0,1 \tau S 10^3}{\rho} \right)^2, \quad (10)$$

$$m_{h(взгл)}^2 = 0,045 + 0,020 \frac{S^2}{v^2} + 0,060 \frac{S}{v} + 0,30 \tau^2 S^2 10^{-6}. \quad (11)$$

Здесь  $m_h$  выражено в миллиметрах,  $S$  — в метрах,  $\tau$  — в секундах дуги.

Приведем пример расчета средней квадратической ошибки превышения по формуле (11) при средних значениях  $v$  и  $\tau$  (табл. 1).

Пусть  $v = 32 \times$ ,  $\tau = 13''$ , тогда при  $S = 75 \text{ м}$

$$m_h^2 = 0,045 + 0,110 + 0,140 + 0,284 = 0,579; m_h = \pm 0,76 \text{ мм.}$$

Заметим, что в этом случае влияние ошибок отсчетов по рейкам на точность превышения равно влиянию ошибок установки уровня.

Перейдем теперь к выводу формулы точности превышения на одной станции нивелирования III класса при наблюдениях по новому методу.

Превышение на одной станции представляется как функция отсчетов только по средней нити

$$h_{(отсч)} = \frac{(3z_q - п_q) + (3z_k - п_k)}{2}, \quad (12)$$

откуда следует

$$m_{h(отсч)}^2 = \frac{4 m_0^2}{4} = m_0^2. \quad (13)$$

При  $t = 10 \text{ мм}$  получим

$$m_{h(отсч)}^2 = \left( 0,30 + 0,20 \frac{S}{v} \right)^2. \quad (14)$$

\* См. диссертацию Л. А. Башлапина «Вопросы нивелирования III класса» 1951 г.

Влияние ошибок установки уровня на точность превышения определяется ошибкой превышения, выраженного в функции отсчетов по рейкам

$$h_{(ур)} = \frac{3_ч - П_ч + 3_к - П_к}{2}, \quad (15)$$

откуда имеем

$$m_{h(ур)}^2 = \frac{4m_{ур}^2}{4} = m_{ур}^2 \quad (16)$$

или

$$m_{h(ур)}^2 = \left( \frac{0,1 \tau S 10^3}{\rho} \right)^2. \quad (17)$$

Следовательно, точность превышения, определяемого на одной станции, обусловленная совместным влиянием ошибок отсчетов и ошибок установки уровня нивелира, выражается формулой

Таблица 2

$S, м$	$m_{h(взгл)}, мм$	$m_{h(взгл)}^2 = \left( 0,30 + 0,20 \frac{S}{v} \right)^2 + \left( \frac{0,1 \tau S 10^3}{\rho} \right)^2, (18)$
25	$\pm 0,48$	$m_{h(взгл)}^2 = 0,09 + 0,04 \frac{S^2}{v^2} + 0,12 \frac{S}{v} + 0,25 \tau^2 S^2 10^{-6}, (19)$
50	$\pm 0,69$	
75	$\pm 0,91$	Приведем пример расчета средней квадратической ошибки превышения по формуле (19) при средних значениях $v$ и $\tau$ . Пусть $v = 32 \times$ , $\tau = 13''$ , тогда получим следующие значения $m_{h(взгл)}$ (табл. 2).
100	$\pm 1,13$	

Накопление ошибок в превышениях, обусловленное влиянием лишь ошибок взглядов, на 1 км хода для старого и нового методов нивелирования выразится следующими величинами (табл. 3).

Таблица 3

$S, м$	$n$ — число станций на 1 км	Старый метод		Новый метод	
		$m_{h(взгл)}, мм$	на 1 км $m_{h(взгл)}, мм$	$m_{h(взгл)}, мм$	на 1 км $m_{h(взгл)}, мм$
25	20	$\pm 0,37$	$\pm 1,6$	$\pm 0,48$	$\pm 2,1$
50	10	0,56	1,8	0,69	2,2
75	6,7	0,76	2,0	0,91	2,3
100	5	0,97	2,2	1,13	2,5

Для сопоставления точности превышений нивелирных ходов, проложенных по двум методам, необходимо, кроме ошибок взглядов, учесть еще и другие ошибки, например ошибку за непостоянство положения штатива нивелира и башмаков или костылей в процессе измерений.

Совместное влияние всех других ошибок на точность нивелирных ходов можно определить, исходя из точности ходов, обусловленной влиянием всех источников ошибок.

Для приближенных расчетов примем, что средняя квадратическая ошибка превышения на 1 км хода, определяемая по старому методу, выражается величиной

$$m_{h км (стар)} = \pm 3,0 мм \text{ при } S = 50 м.$$

Следовательно, если  $m_{h\text{ км}}^2 = m_{h\text{ км (взгл)}}^2 + m_{h\text{ (др)}}^2$ , то

$$m_{h\text{ (др)}} = \sqrt{m_{h\text{ км}}^2 - m_{h\text{ км (взгл)}}^2} = \pm \sqrt{3,0^2 - 1,8^2} = \pm 2,3 \text{ мм.}$$

Такова средняя квадратическая ошибка превышения на 1 км хода, определяемого как по старому, так и по новому методам нивелирования, обусловленная влиянием всех других источников ошибок, кроме тех, которые связаны со взглядами по рейкам.

Следовательно, средняя квадратическая ошибка превышения на 1 км хода, определяемого по новому методу нивелирования, обусловленная влиянием всех источников ошибок, при  $S = 50 \text{ м}$  выразится величиной

$$m_{h\text{ км (нов)}} = \sqrt{m_{h\text{ км (взгл)}}^2 + m_{h\text{ (др)}}^2} = \pm \sqrt{2,2^2 + 2,3^2} = \pm 3,2 \text{ мм.}$$

Итак, предполагая, что влияние всех других источников ошибок (за исключением ошибок, связанных со взглядами по рейкам) на точность нивелирования по старому и новому методам одинаково, можно выразить точность нивелирования по новому методу сравнительно с точностью нивелирования по старому методу в виде отношения средних квадратических ошибок превышений 1 км хода

$$\frac{m_{h\text{ (стар)}}}{m_{h\text{ (нов)}}} = \frac{\pm 3,0 \text{ мм}}{\pm 3,2 \text{ мм}} = 0,94.$$

Таким образом, новый метод нивелирования, имеющий преимущества с точки зрения производительности труда, лишь незначительно уступает по точности старому методу.

Есть основание полагать, что полученное соотношение в действительности будет ближе к единице, во-первых, потому, что отсчеты по средней нити практически оказываются более точными, чем отсчеты по крайним нитям, во-вторых, потому, что влияние некоторых источников ошибок уменьшается вследствие сокращения времени на производство полевых работ.

Для подтверждения теоретических расчетов обратимся к материалам производственного характера.

Для оценки точности возьмем результаты нивелирования III класса, выполненного по старому методу 24 бригадами студентов вторых курсов МИИГАиК во время летней геодезической практики в 1954 г.

Точность превышения на одной станции нивелирования по старому методу определена из сравнения превышений, полученных по наблюдениям черных сторон реек, с превышениями, полученными по наблюдениям красных сторон реек. Затем те же самые материалы нивелирования были использованы вторично; превышения по результатам наблюдения черных сторон реек вычислены как разность отсчетов по задней и передней рейкам лишь по одной средней нити. Разность результатов двойных измерений в этом последнем случае характеризовала, хотя и не в полной мере, точность превышения на одной станции, определяемого по новому методу нивелирования III класса.

Чтобы исключить влияние различия в нанесении на рейках начала счета делений на величину превышений, сравнивалась сумма превышений, найденных по черным сторонам реек на двух смежных станциях нивелирного хода, с суммой превышений, определенных по красным сторонам реек на тех же двух станциях.

Всего было составлено 1560 разностей, из которых 780 послужили основанием для оценки точности старого метода и 780 разностей — для оценки точности нового метода.

Точность превышений, вычисленных по результатам наблюдений черных и красных сторон реек при отсчитывании только по одной сред-

ней нити, принималась одинаковой. Поэтому оценка точности нового метода произведена следующим путем.

Если выразить разность двойных измерений соотношением

$$d = (h_{1,ч} + h_{2,ч}) - (h_{1,к} + h_{2,к}), \quad (20)$$

где  $h_{1,ч}$  и  $h_{2,ч}$  — превышения на двух соседних станциях хода, полученные по наблюдениям черных сторон реек,  $h_{1,к}$  и  $h_{2,к}$  — превышения на двух соседних станциях хода, полученные по наблюдениям красных сторон реек, то, полагая  $m_{h_ч} = m_{h_к}$ , получим

$$m_d^2 = 4m_{h_ч}^2, \text{ откуда } m_{h_ч}^2 = \frac{m_d^2}{4}. \quad (21)$$

Переходя к оценке точности превышения на одной станции по новому методу, выразим превышение в виде среднего арифметического

$$h = \frac{h_ч + h_к}{2} \quad (22)$$

из превышений, полученных по черным и красным сторонам реек. Имея в виду, что  $m_{h_ч} = m_{h_к}$ , получим

$$m_h^2 = \frac{2m_{h_ч}^2}{4}.$$

Отсюда

$$m_h^2 = \frac{m_d^2}{8},$$

$$m_h = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_d^2}{2}}. \quad (23)$$

Окончательно

$$m_h = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}, \quad (24)$$

где  $n$  — число разностей.

Оценка точности старого метода по разностям двойных измерений потребовала учета весов превышений, полученных по наблюдениям черных сторон реек при отсчитывании по всем трем нитям сетки и весов превышений, полученных по наблюдениям красных сторон реек при отсчитывании только по средней нити.

С целью определения весов превышений найдем средние квадратические ошибки превышений.

Искомая ошибка найдется как ошибка функции отсчетов

$$h_{ч(отсч)} = \frac{(з_ч + з_ч + з_ч) - (п_ч + п_ч + п_ч)}{3}, \quad (25)$$

$$m_{h_{ч(отсч)}}^2 = \frac{6m_0^2}{9} = \frac{2}{3} m_0^2, \quad (26)$$

где  $m_0$  — средняя квадратическая ошибка отсчета по одной (любой) нити.

Средняя квадратическая ошибка превышения, зависящая лишь от ошибок установки уровня нивелира, определится как ошибка функции отсчетов по рейкам, произведенных после соответствующих установок уровня нивелира

$$h_{ч(ур)} = з_ч - п_ч, \quad (27)$$

$$m_{h_{ч(ур)}}^2 = 2m_{ур}^2, \quad (28)$$



где  $m_{ур}$  — средняя квадратическая ошибка установки уровня нивелира.

Следовательно, средняя квадратическая ошибка превышения в зависимости от ошибок отсчетов по рейкам и ошибок установки уровня, т. е. в зависимости от ошибок визирования, определится выражением

$$m_{h_ч}^2 = m_{h_ч(отсч)}^2 + m_{h_ч(ур)}^2 = \frac{2}{3} m_0^2 + 2m_{ур}^2$$

или

$$m_{h_ч}^2 = \frac{2}{3} \left( 0,30 + 0,20 \frac{S}{v} \right)^2 + 2 \left( \frac{0,1 \tau S 10^3}{\rho} \right)^2, \quad (29)$$

где  $S$  — длина визирного луча, выраженная в метрах.

Окончательно

$$m_{h_ч}^2 = 0,06 + 0,027 \frac{S^2}{v^2} + 0,08 \frac{S}{v} + 0,50 \tau^2 S^2 10^{-6}. \quad (30)$$

Средняя квадратическая ошибка превышения, вычисляемого по результатам наблюдения красных сторон реек, определится аналогично предыдущему

$$h_{h(отсч)} = z_k - \Pi_k; \quad (31)$$

$$m_{h_k(отсч)}^2 = 2m_0^2; \quad (32)$$

$$h_{k(ур)} = z_k - \Pi_k; \quad (33)$$

$$m_{h_k(ур)}^2 = 2m_{ур}^2; \quad (34)$$

$$m_{h_k}^2 = m_{h_k(отсч)}^2 + m_{h_k(ур)}^2 = 2m_0^2 + 2m_{ур}^2; \quad (35)$$

$$m_{h_k}^2 = 2 \left( 0,30 + 0,20 \frac{S}{v} \right)^2 + 2 \left( \frac{0,1 \tau S 10^3}{\rho} \right)^2. \quad (36)$$

Окончательно

$$m_{h_k}^2 = 0,18 + 0,08 \frac{S^2}{v^2} + 0,24 \frac{S}{v} + 0,50 \tau^2 S^2 10^{-6}. \quad (37)$$

Произведенный расчет численных значений в соотношениях весов превышений  $\frac{P_{h_ч}}{P_{h_k}} = \frac{m_{h_k}^2}{m_{h_ч}^2}$  при  $v = 32 \times$  и  $\tau = 13''$  дал следующие результаты (табл. 4).

Теперь выведем формулу средней квадратической ошибки превышения, определяемого на одной станции по старому методу.

Точность нивелирования определим по разностям сумм превышений каждых двух соседних станций.

Расчет точности отнесем к превышениям, определяемым при длинах визирных лучей в 50 м. В этом случае вес превышения, определяемого по черным сторонам реек, будет в два раза больше веса превышения, определяемого по красным сторонам реек

$$p_{h_ч} = 2p_{h_k},$$

отсюда

$$m_{h_ч}^2 = \frac{m_{h_k}^2}{2}.$$

Т а б л и ц а 4

$S, м$	$\frac{P_{h_ч}}{P_{h_k}}$
25	2,45
50	2,08
75	1,79
100	1,81

Разность двойных измерений согласно принятому условию выразится так:

$$d = (h_{1,ч} + h_{2,ч}) - (h_{1,к} + h_{2,к}), \quad (38)$$

где  $h_1$  и  $h_2$  — превышения на двух соседних станциях нивелирного хода.

Приняв, что  $m_{h_{1,ч}} = m_{h_{2,ч}}$  и  $m_{h_{1,к}} = m_{h_{2,к}}$ , получим

$$m_d^2 = 2m_{h_ч}^2 + 2m_{h_к}^2 = 3m_{h_к}^2, \quad (39)$$

откуда

$$m_{h_к}^2 = \frac{m_d^2}{3}. \quad (40)$$

Среднее весовое значение превышения на одной станции нивелирования по старому методу при  $S = 50$  м равно

$$h = \frac{2h_ч + h_к}{3},$$

$$m_h^2 = \frac{4m_{h_ч}^2 + m_{h_к}^2}{9} = \frac{2m_{h_к}^2 + m_{h_к}^2}{9} = \frac{m_{h_к}^2}{3}. \quad (41)$$

Заменяя  $m_{h_к}^2$  его выражением, получим

$$m_h^2 = \frac{m_d^2}{9}, \quad (42)$$

но

$$m_d^2 = \frac{[d^2]}{n},$$

и поэтому

$$m_h = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}, \quad (43)$$

где  $n$  — число разностей двойных измерений.

Формула точности превышения для случаев, когда  $S = 75$  м или  $S = 100$  м, при  $P_{h_ч} = 1,8$   $P_{h_к}$  имеет вид

$$m_h = \pm \frac{1}{2,96} \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \quad (44)$$

и для случаев, когда  $S = 25$  м, при  $P_{h_ч} = 2,45$   $P_{h_к}$

$$m_h = \pm \frac{1}{3,13} \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \quad (45)$$

Отсюда следует, что оценку точности превышений по разности двойных измерений при любых значениях  $S$  можно выполнять по одной формуле (43).

Обработка полевых журналов нивелирования, включающих 1560 станций нивелирования III класса, привела к следующим результатам:

$$[S] = 48,1 \text{ км},$$

$$S_{\text{ср}} = 31,0 \text{ м}.$$

Для старого метода нивелирования:

$$[d^2] = 2490,$$

$$[d] = +12 \text{ мм}.$$

Для нового метода нивелирования:

$$[d^2] = 2161,$$

$$[d] = -7 \text{ мм.}$$

Обращает на себя внимание очень хорошая компенсация величин разностей  $d$ .

Небольшая средняя длина визирного луча объясняется не столько сложностью рельефа местности, сколько небольшой опытностью нивелировщиков.

В среднем по всей работе при  $S = 31,0 \text{ м}$ ,  $v = 32\times$ ,  $\tau = 13''$  точность превышения на одной станции, обусловленная только ошибками взглядов при нивелировании по старому методу, выразилась величиной

$$m_{h(\text{взгл})} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} = \pm 0,56 \text{ мм},$$

а при нивелировании по новому методу

$$m_{h(\text{взгл})} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} = \pm 0,63 \text{ мм.}$$

Точность превышения на 1 км нивелирования по старому методу выразится величиной

$$m_{h_{\text{км}}(\text{взгл})} = \pm 0,56 \text{ мм} \sqrt{\frac{1000}{62}} = \pm 2,2 \text{ мм},$$

а на 1 км нивелирования по новому методу —

$$m_{h_{\text{км}}(\text{взгл})} = \pm 0,63 \text{ мм} \sqrt{\frac{1000}{62}} = \pm 2,5 \text{ мм.}$$

Положим, что средняя квадратическая ошибка нивелирования по старому методу, обусловленная влиянием всех источников ошибок, выражается величиной  $m_{h_{\text{км}}(\text{стар})} = \pm 3,0 \text{ мм}$  и что влияние других источников ошибок, кроме учтенных по разностям двойных измерений, одинаково как для старого, так и для нового методов нивелирования.

При этих предположениях средняя квадратическая ошибка нивелирования по новому методу выразится величиной  $m_{h_{\text{км}}(\text{нов})} = \pm 3,24 \text{ мм}$ .

Сравнение точности нивелирования по двум методам дает

$$\frac{m_{h(\text{стар})}}{m_{h(\text{нов})}} = \frac{\pm 3,0 \text{ мм}}{\pm 3,2 \text{ мм}} = 0,9.$$

Это совпадает с расчетным соотношением.

Из всего вышесказанного вытекает, что производство нивелирования III класса следует упростить путем уменьшения числа отсчетов на каждой станции. Вместо восьми отсчетов по рейкам достаточно взять шесть, из которых четыре отсчета должны быть сделаны по средней нити, а два — по той дальномерной нити, которая в поле зрения трубы отстоит дальше от поверхности земли, чем другие нити. Для вычисления превышений следует пользоваться лишь отсчетами по средней нити.

ТРУДЫ МОСКОВСКОГО ИНСТИТУТА ИНЖЕНЕРОВ ГЕОДЕЗИИ,  
АЭРОФОТОСЪЕМКИ И КАРТОГРАФИИ

Выпуск 25

1957 г.

Кафедра геодезии

Кандидат техн. наук И. М. Блудова

## ОБ ИЗМЕНЕНИИ ОШИБКИ В ЗАДАННОМ НАПРАВЛЕНИИ

Ошибка положения точки не является одинаковой во всех направлениях. Это обстоятельство, с одной стороны, усложняет предвычисление ошибки и оценку точности результатов, а с другой, — представляет весьма существенное преимущество при организации работ, так как дает возможность в случае необходимости добиваться уменьшения ошибки лишь в одном требуемом направлении, что может быть достигнуто с меньшим трудом, а следовательно, и с меньшими затратами.

Одним из распространенных способов определения координат пункта является способ прямой засечки. На точность определения координат точки основное влияние оказывает величина угла при засекаемой точке, так как от этого зависит величина полуосей и ориентировка эллипса ошибок, являющегося наиболее полной и надежной характеристикой точности определения положения точки. Величины  $A$  и  $B$  полуосей эллипса ошибок могут быть подсчитаны по различным формулам, в зависимости от того, известен ли угол при засекаемой точке или углы при базисе.

При прямой однократной засечке, часто применяемой в инженерной практике, для вычисления значений полуосей эллипса ошибок можно предложить следующие формулы:

$$A = \frac{m_\beta}{2\rho \sin \gamma} (\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \sin \gamma} + \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \sin \gamma}) \quad (1)$$

$$B = \frac{m_\beta}{2\rho \sin \gamma} (\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \sin \gamma} - \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \sin \gamma}).$$

В этих формулах  $\gamma$  — угол при засекаемой точке,  $S_1$  и  $S_2$  — расстояния от твердых точек до определяемой,  $m_\beta$  — средняя квадратическая ошибка измерения угла.

При вычислении по формулам (1) нет необходимости знать дирекционные углы направлений. Благодаря одинаковой структуре формул подсчет по ним весьма несложен.

Рассматривая формулы (1), видим, что наилучшая засечка получается при угле  $\gamma = 90^\circ$  и равных расстояниях от твердых точек до определяемой. Как правило, угол при засекаемой точке не измеряют; известны лишь углы при базисе  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Зная углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , можно вычислить полуоси эллипса ошибок по формулам:

$$A = \frac{m_\beta}{2\rho \sin(\beta_1 + \beta_2)} (\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \sin(\beta_1 + \beta_2)} + \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \sin(\beta_1 + \beta_2)})$$

$$B = \frac{m_\beta}{2\rho \sin(\beta_1 + \beta_2)} (\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \sin(\beta_1 + \beta_2)} - \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \sin(\beta_1 + \beta_2)}) \quad (2)$$

Ориентировка эллипса ошибок в этом случае определяется дирекционным углом большой полуоси эллипса, отсчитываемым от оси X

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\frac{\sin 2\beta_1}{S_1^2} - \frac{\sin 2\beta_2}{S_2^2}}{\frac{\cos 2\beta_1}{S_1^2} + \frac{\cos 2\beta_2}{S_2^2}} \quad (3)$$

Способ прямой угловой засечки имеет большое применение на работах при разбивке сооружений, когда точки, положение которых должно быть отмечено, значительно удалены от опорных пунктов и непосредственное измерение расстояний и углов между ними невозможно. В частности, этот способ используется для разбивки таких сооружений, как опоры мостов, плотин. Следовательно, отмеченный способ является одним из основных для разбивки крупных сооружений.

Рассмотрим вопрос о точности определения положения пункта указанным методом.

Прямая однократная засечка с успехом может применяться лишь для разбивки сооружений весьма ограниченной длины, формы и размера. Гораздо чаще встречаются работы по разбивке сооружений более чем с двух точек.

В последнем случае надо учитывать два обстоятельства: необходимое число засекающих направлений и комбинации углов при засекаемой точке. Выше было указано, что точность определения положения точки наиболее полно характеризуется эллипсом ошибок, а следовательно, и вопрос о наилучшем размещении опорных точек для определения координат пунктов или для разбивки сооружений методом прямой засечки надо рассматривать именно с точки зрения формы, размеров и ориентировки получающихся эллипсов ошибок.

Наиболее полно оценка точности определения положения точки осуществляется с помощью веса эллипса ошибок, который можно вычислить, пользуясь формулой

$$P = \frac{1}{A^2 + B^2} \quad (4)$$

где  $A$  и  $B$  — полуоси эллипса ошибок. Приводимая формула отражает изменение не только размеров, но и формы эллипса ошибок, что весьма существенно.

Для решения вопроса об оптимальном числе засекающих направлений рассмотрим, как изменяется вес эллипса с увеличением числа направлений. Такое решение является более общим, учитывая, что уменьшение одной из осей не приводит к уменьшению другой и к уменьшению эллипса ошибок вообще.

Математическое содержание вопроса не представляет интереса. Ограничимся лишь практической стороной дела.

Установлено, что при переходе от двух направлений к трем вес эллипса ошибок (при наилучших углах засечки в том и другом случаях) увеличивается в полтора раза, а его полуоси — примерно на  $1/5$  перво-

начальной величины. При четырех направлениях вес увеличивается всего на  $1/3$  величины веса эллипса ошибок при трех направлениях. Следовательно, при дальнейшем увеличении числа направлений вес эллипса, а значит и точность определения положения пункта, поднимается менее заметно. Поэтому нет смысла увеличивать число направлений при определении координат точки методом прямой многократной засечки. Целесообразнее рассчитать, какие именно комбинации углов засечки являются наиболее благоприятными. Имеются основания полагать, что достаточно ограничиться четырьмя направлениями, так как при благоприятных углах засечки можно поднять вес эллипса ошибок в два раза и в полтора раза уменьшить его полуоси.

Перейдем к вопросу о наиболее выгодной комбинации углов засечки. Положение пункта просто и удобно определять с трех твердых точек. Поэтому решим задачу о благоприятных углах засечки именно для этого случая. Для простоты рассуждений ограничимся случаем равных расстояний от твердых пунктов до определяемого. Для этого воспользуемся предлагаемыми автором формулами определения размеров полуосей эллипса ошибок и дирекционного угла большой полуоси эллипса:

$$\begin{aligned} A^2 &= m_p^2 S^2 \frac{n + \sqrt{n + 2[\cos 2(\alpha_k - \alpha_{k-i})]}}{2[\sin^2(\alpha_k - \alpha_{k-i})]}, \\ B^2 &= m_p^2 S^2 \frac{n - \sqrt{n + 2[\cos 2(\alpha_k - \alpha_{k-i})]}}{2[\sin^2(\alpha_k - \alpha_{k-i})]}, \\ \operatorname{tg} 2\varphi &= \frac{[\sin 2\alpha]}{[\cos 2\alpha]} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{при } k &= 2, 3, \dots, n, \\ i &= 1, 2, \dots, k-1, \end{aligned}$$

где  $n$  — число направлений,  $k, i$  — порядковые номера направлений. Формулы (5) очень просты и вычисление по ним не составляет труда. Так для случая трех направлений формулы принимают вид:

$$\begin{aligned} A^2 &= m_p^2 S^2 \frac{3 + \sqrt{3 + 2\{\cos 2(\alpha_2 - \alpha_1) + \cos 2(\alpha_3 - \alpha_2) + \cos 2(\alpha_3 - \alpha_1)\}}}{2\{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) + \sin^2(\alpha_3 - \alpha_2) + \sin^2(\alpha_3 - \alpha_1)\}}, \\ B^2 &= m_p^2 S^2 \frac{3 - \sqrt{3 + 2\{\cos 2(\alpha_2 - \alpha_1) + \cos 2(\alpha_3 - \alpha_2) + \cos 2(\alpha_3 - \alpha_1)\}}}{2\{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) + \sin^2(\alpha_3 - \alpha_2) + \sin^2(\alpha_3 - \alpha_1)\}}. \end{aligned}$$

Для определения выгодной комбинации углов в случае прямой многократной засечки по формулам (5) вычисляем полуоси эллипса ошибок сначала для однократной засечки, а затем, оставляя первые два дирекционные угла без изменения, добавляем третье направление и находим полуоси эллипса ошибок для случая трех направлений. При этом изменяем углы между засекающими направлениями для того, чтобы установить, как изменяются ориентировка, форма и размеры эллипса, а также его вес.

При рассмотрении трех характерных случаев, приходим к следующим выводам.

1. Если два засекающих направления составляют между собой угол, близкий к  $90^\circ$ , то третье направление можно дать как внутри, так и вне угла, образованного первыми двумя направлениями. В этом случае веса эллипсов получаются одинаковыми (если разность дирекционных углов одного из предыдущих направлений и нового в первом и втором случаях примерно одинаковы), но форма и расположение эллипсов оказываются различными. На рис. 1 однократная засечка образована направлениями

Характеристика	A	B	$\varphi$	Вес
Вариант				$P = \frac{1}{A^2 + B^2}$
I	1,10	0,92	85°20'	0,48
II	0,92	0,74	167°24'	0,71
III	1,02	0,60	81°06'	0,71

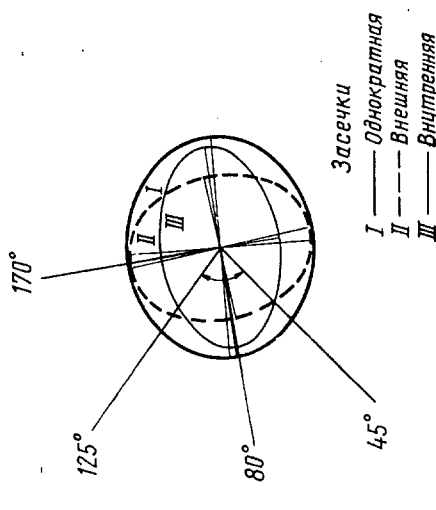


Рис. 1

Характеристика	A	B	$\varphi$	Вес
Вариант				$P = \frac{1}{A^2 + B^2}$
I	1,50	0,79	17°30'	0,35
II	1,45	0,53	25°48'	0,40
III	0,92	0,74	167°24'	0,71

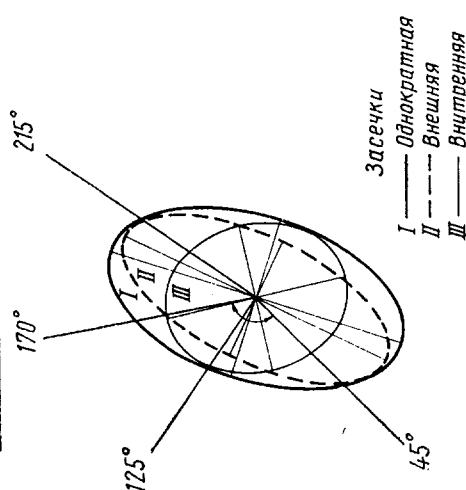


Рис. 2

Характеристика	A	B	$\varphi$	Вес
Вариант				$P = \frac{1}{A^2 + B^2}$
I	1,73	0,80	26°00'	0,27
II	1,06	0,73	49°16'	0,62
III	1,67	0,61	21°20'	0,31

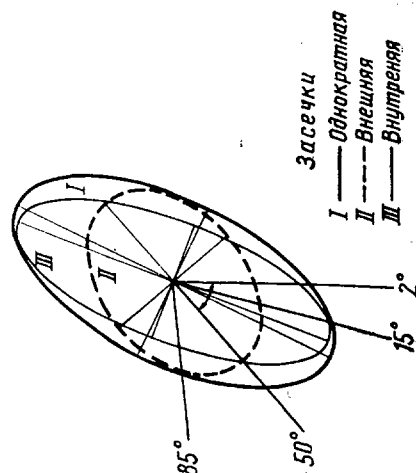


Рис. 3

с дирекционными углами 125 и 45°. Внутренняя засечка проведена под дирекционным углом 80°, внешняя — под дирекционным углом 170°. Эллипсы ошибок в обоих случаях имеют одинаковые веса (71), но расположены они различно. В этом случае судить о наиболее выгодной комбинации углов можно, лишь заранее зная, по какому направлению желательнее иметь меньшую ошибку.

2. Если угол однократной засечки тупой и значительно больше 90°, то эллипс ошибок получается с весом, значительно меньшим, чем при угле, близком к 90°. В таком случае внешняя засечка под острым углом к ближайшему направлению очень незначительно поднимает вес эллипса ошибок, уменьшая немного лишь малую полуось эллипса. Засечка же внутренняя существенно улучшит дело, увеличивая первоначальный вес эллипса в два раза. В этом случае заметно уменьшаются обе полуоси, и эллипс приобретает менее вытянутую форму, значительно изменяя и свою ориентировку (рис. 2).

3. Если однократная засечка произведена под острым углом, значительно меньшим 90°, то введение дополнительного направления внутри острого угла сокращает более или менее заметно лишь малую полуось и почти не изменяет большую. Положение эллипса ошибок при этом несколько изменяется. Вес увеличивается незначительно (с 27 до 31). Максимальная ошибка остается в направлении, перпендикулярном базису засечки.

Если дополнительное, третье направление, проходит вне угла, образованного первыми двумя направлениями, то вес эллипса ошибок увеличивается более чем в два раза (при взятых в примере углах), полуоси эллипса уменьшаются, причем особенно значительно уменьшается большая полуось, значения ошибок по различным направлениям выравниваются (рис. 3).

Из этих соображений следует, что можно заранее рассчитать, как надо расположить опорные точки, чтобы в различных направлениях получить пункты с требуемой точностью. Применение эллипса ошибок при предвычислениях и оценке точности дает возможность установить, какую ошибку можно получить в том или ином направлении и, наоборот, определить заранее то направление, по которому можно получить наименьшую или наибольшую ошибку.

Нетрудно продолжить рассуждения и на случай большего числа направлений.

Учитывая, что при введении дополнительных направлений меняется величина ошибок, имеющих разные дирекционные углы, можно заранее рассчитать, под каким углом надо сделать дополнительную засечку, чтобы уменьшить ошибку в определенном, наперед заданном направлении.

Для разрешения указанной задачи воспользуемся формулой (5) дирекционного угла большой полуоси эллипса ошибок, полученного по известным дирекционным углам засекающих направлений для случая равных расстояний.

Для случая трех направлений имеем

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 + \sin 2\alpha_3}{\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2 + \cos 2\alpha_3},$$

откуда следует, что

$$\sin 2\varphi \cos 2\alpha_3 - \cos 2\varphi \sin 2\alpha_3 = \cos 2\varphi \sin 2\alpha_1 - \sin 2\varphi \cos 2\alpha_1 + \\ + \cos 2\varphi \sin 2\alpha_2 - \sin 2\varphi \cos 2\alpha_2$$

или

$$\sin 2(\varphi - \alpha_3) = \sin 2(\alpha_1 - \varphi) + \sin 2(\alpha_2 - \varphi). \quad (6)$$



Формула (6) дает ответ на поставленный вопрос, а именно: зная дирекционные углы двух засекающих направлений, можно вычислить, под каким дирекционным углом надо дать третью засечку, чтобы максимальная ошибка (т. е. большая полуось эллипса ошибок) имела дирекционный угол  $\varphi$ , а наименьшая ошибка (малая полуось эллипса ошибок) располагалась под углом  $\varphi + 90^\circ$  по намеченному направлению. Уравнение (6) имеет два корня, что означает возможность получения двух значений дирекционных углов, под которыми одинаковым образом можно дать дополнительную засечку для того, чтобы наименьшая при данных условиях ошибка получилась в требуемом направлении.

Формулу (6) можно записать в более общем виде, применительно к любому числу направлений

$$\sin 2(\varphi - \alpha_n) = [\sin 2(\alpha_m - \varphi)], \quad (7)$$

где  $m = 1, 2, \dots, n-1$ , а  $n$  — номер дополнительного направления.

**Пример.** Прямая однократная засечка произведена под дирекционными углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Необходимо уменьшить ошибку по направлению, дирекционный угол которого  $\varphi + 90^\circ$ . Для этого предполагается дать третью дополнительную засечку. Найти дирекционный угол третьего направления.

$$\alpha_1 = 2^\circ;$$

$$\alpha_2 = 50^\circ;$$

$$\varphi = 138^\circ 42'; \quad \varphi + 90^\circ = 228^\circ 42';$$

$$\sin 2(\varphi - \alpha_3) = \sin 2(\alpha_1 - \varphi) + \sin 2(\alpha_2 - \varphi);$$

$$\sin 2(\varphi - \alpha_3) = \sin 86^\circ 36' + \sin 182^\circ 36';$$

$$\sin 2(\varphi - \alpha_3) = 0,998 - 0,045 = +0,953;$$

$$1. \quad 2(\varphi - \alpha_3) = 72^\circ 20'; \quad \alpha_3 = 102^\circ 32';$$

$$2. \quad 2(\varphi - \alpha_3) = 107^\circ 40'; \quad \alpha_3 = 84^\circ 52'.$$

Следовательно, для того чтобы по направлению, дирекционный угол которого равен  $228^\circ 42'$ , ошибка была наименьшая (т. е. чтобы дирекционный угол малой полуоси эллипса ошибок был равен  $228^\circ 42'$ ), надо третью дополнительную засечку сделать под дирекционным углом либо  $102^\circ 32'$ , либо  $84^\circ 52'$ .

Для предвычисления величины самой ошибки по направлению  $\varphi + 90^\circ$ , т. е. малой полуоси эллипса ошибок, можно применить формулу (5). Вопрос о том, в каких пределах можно изменять угол дополнительной засечки, чтобы сохранить в определенных границах наименьшую ошибку в требуемом направлении, приходится в каждом конкретном случае решать особо, так как точность определения положения пункта зависит от разности дирекционных углов засекающих направлений.

ТРУДЫ МОСКОВСКОГО ИНСТИТУТА ИНЖЕНЕРОВ ГЕОДЕЗИИ,  
АЭРОФОТОСЪЕМКИ И КАРТОГРАФИИ

Выпуск 25

1957 г.

Кафедра астрономии

Кандидат техн. наук Н. А. Белова

**О ПРИМЕНЕНИИ ПРИНЦИПА НЕСВОБОДНОГО ПЛАВАНИЯ  
ДЛЯ НИВЕЛИРОВАНИЯ АСТРОНОМИЧЕСКИХ ИНСТРУМЕНТОВ**

Специальным конструкторским бюро Министерства высшего образования по заданию кафедры астрономии МИИГАиК спроектирована опора для трубы зенит-телескопа, основанного на принципе несвободного плавания.

Принцип несвободного плавания применен на основании теоретического анализа механики плавающего тела и предшествующих исследований Чандлера, Куксона и Спенсера Джонса.

Чандлер, построивший в 1879 г. два плавающих альмукантара, показал, что они возвращаются в положение равновесия с точностью  $\pm 0'',05$ , т. е. с точностью большей, чем пузырек чувствительного уровня. В 1891 г. в Кембридже Куксон построил фотографический плавающий зенит-телескоп, который через несколько лет был передан Гринвичской обсерватории и до 1940 г. употреблялся для изучения вариаций широты, определения постоянных абберации и нутации и для других высокоточных астрономических определений. Исследование наблюдений с 1911 по 1936 г., произведенное Спенсером Джонсом, показало, что они обладают высокой точностью (вероятная ошибка определения широты по одной пластинке, т. е. из 4—5 пар Талькотта, оказалась равной  $\pm 0'',074$ ). Однако в результатах были обнаружены систематические отклонения порядка  $0'',1$ . Какова же причина этих систематических отклонений?

Предположим, что движение происходит в среде без сопротивления. Тогда дифференциальные уравнения движения плавающего зенит-телескопа имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{P}{g} \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} &= 0; \\ \frac{P}{g} \frac{d^2 \eta_0}{dt^2} &= 0; \\ \frac{P}{g} \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} + \gamma S_0 \zeta_0 &= \gamma S_0 l \psi; \\ C \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - E \frac{d^2 \Theta_1}{dt^2} &= 0; \\ B \frac{d^2 \psi}{dt^2} + P(\rho - a) \psi &= \gamma S_0 l \zeta_0; \\ A \frac{d^2 \Theta_1}{dt^2} + P(\rho - a) \Theta_1 - E \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= 0,\end{aligned}$$

где  $P$  — вес плавающего зенит-телескопа;  
 $g$  — ускорение силы тяжести в точке наблюдения;  
 $\frac{d^2 \xi_0}{dt^2}, \frac{d^2 \eta_0}{dt^2}, \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2}$  — ускорения движения центра тяжести инструмента в направлении неподвижных в пространстве осей координат  $O\xi, O\eta, O\zeta$ ;  
 $\gamma$  — удельный вес ртути;  
 $S_0$  — площадь ватерлинии положения равновесия;  
 $\zeta_0$  — абсолютная координата центра тяжести инструмента;  
 $l$  — абсцисса центра тяжести площади ватерлинии положения равновесия, считаемая от коллимационной плоскости инструмента;  
 $\varphi, \psi, \theta_1$  — эйлеровы углы;  
 $A, B, C$  — моменты инерции плавающего зенит-телескопа относительно подвижных, неизменно связанных с инструментом осей координат, проходящих через центр тяжести;  
 $E$  — центробежный момент;  
 $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \frac{d^2 \psi}{dt^2}, \frac{d^2 \theta_1}{dt^2}$  — угловые ускорения вращательного движения инструмента относительно осей  $OX, OY, OZ$ , проходящих через центр тяжести плавающей системы.

Первые три уравнения представляют собой уравнения движения центра тяжести инструмента, а последние три — вращательного движения относительно осей, проходящих через центр тяжести.

Из анализа уравнений движения плавающего зенит-телескопа следует, что

1) если абсцисса центра тяжести площади ватерлинии положения равновесия не равна нулю, то вертикальные колебания по оси  $\zeta$  сопровождаются угловыми колебаниями относительно оси, перпендикулярной к коллимационной плоскости инструмента;

2) если центробежный момент  $E = \Sigma m r_{\text{уг}}$  не равен нулю, то колебания относительно вертикальной оси сопровождаются колебаниями относительно оси, лежащей в коллимационной плоскости инструмента;

3) если силы, действующие в направлении осей, лежащих в коллимационной плоскости и в плоскости, ей перпендикулярной, не равны нулю, то инструмент имеет возможность поступательного движения по поверхности ртути.

Проволочный полигон, употребляемый в гринвичском зенит-телескопе для предотвращения такого передвижения, вследствие своего несовершенства не может полностью исключить нарушение концентричности ртутной ванны и поплавок. Приближение же поплавка к стенкам ртутной ванны приводит к тому, что эффект капиллярности влияет на точность возвращения инструмента в положение равновесия.

Несовершенно также приспособление для установки зенит-телескопа в меридиане. Ножевые опоры, прижимаемые слабыми пружинами к лагерам на поплавке, не могут полностью устранить колебания вокруг вертикальной оси после того, как инструмент установлен в меридиане.

Вследствие большого веса (140 кг) и размеров гринвичского плавающего зенит-телескопа, а также значительного отклонения от зенита его массивной трубы центробежный момент достигает значительной величины. Следовательно, и взаимное влияние различных видов колебательных движений в этом инструменте должно быть весьма существенным. Угловые колебания в горизонтальной плоскости и вертикальные смещения центра тяжести вызывают значительные колебания в коллимационной плоскости даже в том случае, если никакой силы к инструменту в этой плоскости приложено не было.

Указанные обстоятельства объясняют наличие в наблюдениях на гринвичском плавающем зенит-телескопе небольших систематических отклонений.

Систематические отклонения такого же рода, как в Гринвиче, обнаружены на Международной широтной станции Мицузава при наблюдениях на плавающем зенит-телескопе, конструкция которого совершенно аналогична гринвичскому.

Далее, из рассмотрения метацентрической формулы устойчивости  $M = P(\rho - a)\Theta$ , где  $P$  — вес инструмента,  $\rho$  — метацентрический радиус,  $a$  — расстояние от центра тяжести плавающей системы до центра тяжести объема вытесненной поплавок ртути,  $\Theta$  — угол наклона, следует, что:

1) для увеличения восстанавливающего момента и, следовательно, устойчивости инструмента конструкция плавающего зенит-телескопа должна быть разработана так, чтобы центр тяжести инструмента и центр тяжести объема вытесненной поплавок ртути совпадали;

2) поскольку метацентрический радиус пропорционален моменту инерции площади, ограниченной действующей ватерлинией поплавок, наиболее целесообразной формой последнего является кольцеобразная форма (момент инерции площади действующей ватерлинии в этом случае имеет наибольшую величину);

3) восстанавливающий момент пропорционален весу инструмента, уравновешиваемому выталкивающей силой ртути.

Однако повышение начальной устойчивости, достигаемое увеличением размеров и веса инструмента, приводит к увеличению его инерции и, следовательно, к уменьшению скорости затухания колебаний. Например, колебания гринвичского плавающего зенит-телескопа полностью затухают только через 2,5—3 мин. Это объясняется еще и тем, что вследствие большой плотности коэффициент динамической вязкости ртути очень мал и возникшие в ней колебания носят устойчивый характер, в свою очередь возбуждая колебания поплавок.

Ясно, что в свободно плавающих инструментах совместить эти противоречивые требования нельзя. Однако из анализа метацентрической формулы устойчивости видно, что существует и другой путь повышения начальной устойчивости: за счет увеличения выталкивающей силы ртути  $Q$ , равной произведению вытесненного объема ртути на ее удельный вес и в случае свободного плавания уравновешиваемой весом плавающей системы. Но это уравновешивание может быть достигнуто использованием силы реакции опоры. Инструмент принудительно погружается в ртуть действием связи «поплавок—ртутная ванна» и удерживается в этом положении. Он превращается в несвободно плавающее тело, притянутое к дну ртутной ванны. В этом случае при одном и том же весе инструмента выталкивающая сила, а следовательно, и устойчивость инструмента могут быть увеличены в 4—5 раз.

Принудительное погружение поплавок в ртуть должно быть осуществлено таким образом, чтобы была сохранена необходимая для работы подвижность инструмента (вращение по азимуту и колебания в любой из вертикальных плоскостей). Этого можно достигнуть при помощи обычного карданного подвеса с двумя степенями свободы.

Для осуществления азимутального вращения внешнее кольцо карданного подвеса должно быть сделано скользящим на шарикоподшипнике относительно кольца, жестко связанного с ртутной ванной.

Принудительно погружая поплавок в ртуть, исключаем возможность движения центра тяжести плавающей системы и, таким образом, имеем:

$$\frac{d\zeta}{dt} = 0; \quad \frac{d\eta}{dt} = 0; \quad \frac{d\xi}{dt} = 0.$$

Эффект капиллярности и прикосновения поплавка к стенкам ртутной ванны не повлияют на точность возвращения инструмента в положение равновесия, поскольку в данном случае возможность поступательных перемещений поплавка по поверхности ртути исключена. Путем уменьшения расстояния между стенками ртутной ванны и поплавка количество используемой ртути может быть уменьшено. Это приведет к ослаблению обратного влияния волнового движения ртути на колебания поплавка.

Таким образом, уравнения движения, выведенного из положения равновесия несвободно плавающего зенит-телескопа, значительно упрощаются и имеют вид:

$$C \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - E \frac{d^2 \Theta_1}{dt^2} = 0;$$

$$B \frac{d^2 \psi}{dt^2} + Q(\rho - a)\psi = \gamma S_0 l \zeta_0;$$

$$A \frac{d^2 \Theta_1}{dt^2} + Q(\rho - a)\Theta_1 - E \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0,$$

т. е. движение несвободно плавающего зенит-телескопа характеризуется лишь уравнениями вращательного движения относительно осей, проходящих через центр тяжести.

Для того, чтобы моменты инерции плавающей системы были минимальны, точка подвеса и центр тяжести системы должны совпадать. Тогда движение будет происходить относительно центральных осей и скорость затухания колебаний увеличится.

Из рассмотрения дифференциальных уравнений движения несвободно плавающего зенит-телескопа видно, что если центрбежный момент  $E$  не равен нулю, то колебания относительно вертикальной оси сопровождаются колебаниями в коллимационной плоскости и наоборот. Однако, имея в виду, что на шарикоподшипник действует сила, равная разности выталкивающей силы ртути и веса инструмента, создающая относительно вертикальной оси значительный момент трения, возможность возникновения колебаний вокруг вертикальной оси исключается. Установка инструмента в меридиане может быть сделана с большой точностью.

Поскольку во втором уравнении правая часть всегда равна нулю, так как  $\zeta_0 = 0$ , то такая схема не требует точного совпадения центра тяжести площади ватерлинии положения равновесия с проекцией центра тяжести инструмента.

Понятно, что изложенные выше обстоятельства упрощают конструкцию инструмента и способствуют ускорению затухания его колебаний.

После установки по азимуту дифференциальные уравнения движения несвободно плавающего зенит-телескопа имеют вид:

$$B \frac{d^2 \psi}{dt^2} + Q(\rho - a)\psi = 0,$$

$$A \frac{d^2 \Theta_1}{dt^2} + Q(\rho - a)\Theta_1 = 0.$$

После интегрирования их получим:

$$\psi = \psi_0 \cos n_2 t = \psi_0 \cos \frac{2\pi t}{T_2},$$

$$\Theta_1 = \Theta_0 \cos n_1 t = \Theta_0 \cos \frac{2\pi t}{T_1},$$

где

$$T_2 = \frac{2\pi}{n_2} = 2\pi \sqrt{\frac{B}{P(\rho - a)}},$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{n_1} = 2\pi \sqrt{\frac{A}{P(\rho - a)}}.$$

Каковы же преимущества принципа несвободного плавания? Применение принципа несвободного плавания позволяет: 1) полностью исключить взаимодействие различных видов колебательного движения, 2) достигнуть более выгодного соотношения между силами инерции и демпфирования, 3) не препятствуя колебаниям в вертикальных плоскостях, устранить возможность вертикальных и горизонтальных смещений центра тяжести инструмента и колебаний в горизонтальной плоскости.

Теоретические расчеты показывают, что несвободно плавающий зенит-телескоп, параметры которого приводятся ниже, возвращается в положение равновесия с точностью  $\pm 0'',01 - \pm 0'',05$ . Колебания затухают в течение 1—1,5 мин.

Теоретические выводы в отношении скорости затухания колебаний были проверены экспериментально.

Для этой цели в УПМ МИИГАиК были изготовлены две модели, одна из которых предназначалась для несвободного, другая — для свободного плавания. В первом случае погружение поплавка в воду на заданную глубину осуществлялось с помощью тонкой гибкой нити. Нить дает поплавку три степени свободы (вращение около вертикальной и горизонтальных осей) и играет в модели ту же роль, какую в зенит-телескопе — комбинация карданного подвеса и подшипника. Во второй модели погружение поплавка в воду на ту же глубину осуществлялось при помощи добавочного груза. Затухание колебаний в обоих случаях исследовалось фотографически.

Из рассмотрения кривых колебаний поплавков видно, что при соотношении весов, равном двум, колебания несвободно плавающего поплавка затухают в два с половиной раза быстрее, чем свободно плавающего.

В фотозаписи колебаний при больших амплитудах их величина и характер затухания определяются в основном собственными колебаниями поплавка. Влияние колебаний жидкости становится заметным лишь при малых амплитудах. Выражается оно в том, что появляются отклонения от закономерного убывания амплитуды колебаний, вызванные резонансом собственных колебаний поплавка и колебаний жидкости.

Основным фактором, влияющим на точность возвращения несвободно плавающей системы в положение равновесия, является трение в ножевых опорах.

На ребра призм действует большая сила, равная разности выталкивающей силы руги и веса плавающей системы и уравновешиваемая реакцией призм.

Сила трения направлена в сторону, противоположную движению, и зависит от величины нормального давления. Выведенный из положения равновесия зенит-телескоп прекратит движение и останется отклоненным от положения равновесия на угол  $\Theta$ , при котором восстанавливающий момент равен моменту сил трения.

Формулы, применяемые в общем машиностроении для расчета сил трения и справедливые для крупных деталей, в области микрогеометрии неприемлемы. Поэтому расчет момента сил трения, возникающего при колебаниях несвободно плавающей системы, был основан на использо-

вании экспериментальных данных Института метрологии по исследованию точности образцовых весов. Такой путь является вполне законным, поскольку динамически схема весов и схема несвободно плавающего, опирающегося на призмы зенит-телескопа совершенно идентичны. Разница заключается лишь в том, что в одном случае активной силой является вес, а в другом — выталкивающая сила ртути. Было подсчитано, что при угле отклонения оси вращения инструмента от отвесного положения, равном  $0''{,}01$ , восстанавливающий момент в три раза больше момента сил трения и, следовательно, заданная точность нивелирования при данной конструкции зенит-телескопа будет обеспечена. При длине ребра призмы 2,5 см действующая на один погонный сантиметр нагрузка равняется 78 кг, в то время как предельная нагрузка, устанавливаемая ГОСТ 5079—49 на ребра призм весоизмерительных приборов, 100 кг. Некоторое влияние на точность возвращения зенит-телескопа в положение равновесия оказывают: движение воздуха, внешние вибрации, температурные эффекты и другие факторы. Однако, учитывая большую величину выталкивающей силы, в 3,5 раза превышающей вес инструмента, их влияние вряд ли будет значительным.

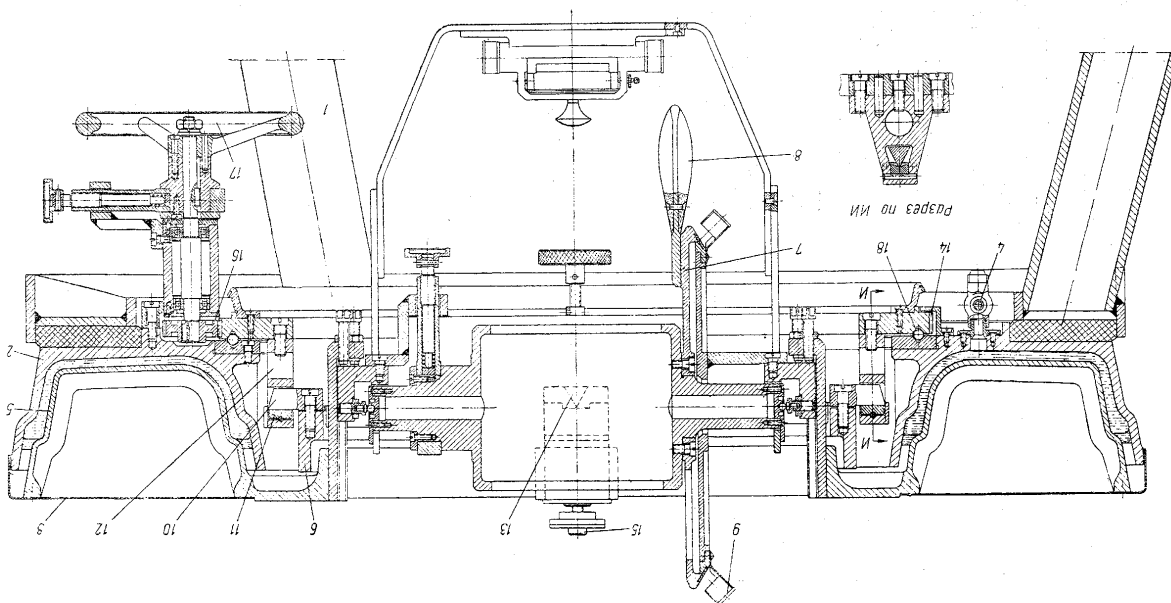
Опора для трубы зенит-телескопа, основанного на принципе несвободного плавания, спроектированная СКБ Министерства высшего образования, состоит из следующих основных узлов: подставки, ртутной ванны, плавающей системы, устройства для наведения трубы по азимуту и зенитному расстоянию.

Подставка 1 (рисунок) представляет собой стальную сварную конструкцию, служащую для поддержания рабочей части опоры. Подставка состоит из верхнего и нижнего опорных колец, связанных тремя трубчатыми стойками диаметром 102 мм.

Для изоляции рабочей части опоры от внешних вибраций между плоскостью верхнего кольца и дном ртутной ванны находится резиновая прокладка. Для придания установке наибольшей устойчивости нижние концы трубчатых стоек припаяны к нижнему опорному кольцу, врезанному в бетон.

Ртутная ванна 2 — чугунная отливка кольцеобразной формы, внешний диаметр 1230 мм, внутренний 710 мм, высота 125 мм. Для предохранения от испарения и загрязнения поверхность ртути покрывается 10-миллиметровым слоем трансформаторного масла и закрывается тонким металлическим кожухом 3. В дне ртутной ванны имеется кран для спуска ртути во время проверки и ремонта инструмента 4.

Плавающая система — чугунный кольцеобразный поплавок 5, внешний диаметр 1220 мм, внутренний 730 мм, высота 147 мм, глубина погружения при выталкивающей силе 605 кг равна 80 мм, метacentрический радиус  $\rho = 1450$  мм. На поплавке укреплены латеры 6, в которых лежит горизонтальная ось трубы. На горизонтальной оси с одной стороны помещается вертикальный круг для установки трубы по зенитному расстоянию 7 с рукояткой для грубой наводки 8, с другой — уравнильный груз и рычаг точной наводки. Диаметр вертикального круга 406 мм. На лагере, расположенной со стороны вертикального круга, закреплен жесткий кронштейн, несущий два диаметрально расположенных нониуса с лупами восьмикратного увеличения 9. На другой лагере закреплен кронштейн с микрометрическим винтом для точной наводки трубы по зенитному расстоянию. На кронштейнах поплавок крепится пара диаметрально расположенных ножевых опор 10, опирающихся на самоустанавливающиеся подушки 11, заделанные в скобах карданного кольца 12. В перпендикулярной плоскости, на карданном кольце крепится другая пара ножевых опор 13, опирающаяся на самоустанавливающиеся по-





душки, заделанные в кронштейнах зубчатого колеса 14. Таким образом, карданный подвес имеет две пары диаметрально расположенных ножевых опор, лежащих на двух взаимно перпендикулярных пересекающихся прямых, точка пересечения которых называется точкой подвеса плавающей системы.

Точка подвеса должна совпадать с точкой пересечения горизонтальной и вертикальной осей вращения трубы и центром тяжести плавающей системы при установке трубы на любое зенитное расстояние и в любом азимуте.

Карданное кольцо с призмами и самоустанавливающимися подушками должно быть статически сбалансировано относительно двух взаимно перпендикулярных осей, совпадающих с направлениями рабочих ребер призм.

Для обеспечения этих требований имеется система противовесов и уравнительных грузов. Для нивелирования горизонтальной оси трубы и совмещения ее с точкой подвеса лагеры регулируются микрометренными винтами в вертикальных направляющих, закрепленных на поплавке. Нивелирование горизонтальной оси осуществляется при помощи уровня.

Карданный подвес, являясь переходным элементом механизма вращения плавающей системы, предоставляет ей возможность колебательного движения в любой вертикальной плоскости.

Инструмент приводится в нерабочее положение ввинчиванием винтов 15.

Параметры инструмента подсчитаны для трубы с отверстием объектива 180 мм и максимальным отклонением от зенита 45°. Общий вес плавающей системы 170 кг.

Механизм поворота трубы по азимуту состоит из одноступенчатой цилиндрической передачи, колесо которой посредством карданного подвеса связано с плавающей системой, а шестерня 16 — посредством вала с маховиком 17. При вращении маховика от руки вращательное движение через цилиндрическую передачу и карданный подвес передается плавающей системе. Колесо цилиндрической передачи, являясь одновременно нижним кольцом насыпного шарикоподшипника 18, имеет концентричную с начальной окружностью канавку. Опираясь канавкой через шарики на верхнее подшипниковое кольцо с такой же канавкой, заделанной на неподвижной ртутной ванне, оно центрирует плавающую систему относительно оси вращения.

На зубчатом колесе укреплен лимб диаметром 750 мм для установки трубы по азимуту. На ступице маховика по скользящей посадке посажен рычаг для точной наводки. В момент наводки рычаг скрепляется со ступицей специальным фиксатором, после чего вращением микрометрического винта 15 совмещают нужные риски шкалы и нониуса. Отсчитывание по вертикальному и горизонтальному кругам выполняется с помощью нониусов с точностью до 1'.

Таково в общих чертах устройство и принцип действия инструмента. После изготовления инструмента будет проведено тщательное исследование точности возвращения его в положение равновесия, возможности микрометренных смещений в горизонтальной плоскости без нарушения равновесия и др. Если окажется, что теоретические расчеты в отношении скорости затухания колебаний и точности возвращения в положение равновесия подтверждаются, то будет изготовлена труба для наблюдения звезд фотографическим методом, менее подверженным влиянию тепла наблюдателя и вообще более удобным для плавающего инструмента.

Если окажется, что начальная остойчивость инструмента настолько велика, что микрометрические азимутальные смещения не будут нарушать

равновесия инструмента, то последний может быть применен для определения времени по способу Цингера, а также для определения времени в меридиане. В этом случае целесообразно применить фотоэлектрический метод регистрации звездных прохождений.

#### ЛИТЕРАТУРА

Собрание трудов академика А. Н. Крылова, т. IX, ч. I, М.—Л., 1948.

Собрание трудов академика А. Н. Крылова, т. XI, М.—Л., 1950.

Инструкция 1939—1941 гг. для поверки образцовых весов. М., 1947.

ГОСТ 5075-49 для весоизмерительных приборов.

Cookson. Description of the Floating Photographic zenith-telescope and some preliminary results obtained with it. Monthly Notices, vol. LXI, London, 1900 — 1901.

Chandler. The almucantar (on investigation made at the observatory in 1884 and 1885). Annals of the astronomical observatory of Harvard College, vol. XVII, Cambridge, 1887.

Spenser Jones. Observations made with the Cookson floating zenith-telescope in the years 1927 — 1936 at the Royal observatory, Greenwich and the determination of the variation of latitude and the constant of nutation from observations in the 1911 — 1936, London, 1939.

ТРУДЫ МОСКОВСКОГО ИНСТИТУТА ИНЖЕНЕРОВ ГЕОДЕЗИИ,  
АЭРОФОТОСЪЕМКИ И КАРТОГРАФИИ

Выпуск 25

1957 г.

Кафедра составления и редактирования карт

Профессор доктор экономических наук Г. Н. Черданцев

**ТИПЫ СОЦИАЛЬНЫХ КАРТ СССР**  
(окончание)\*

Многообразие социальных карт СССР и важность отображения на карте отдельных тематических вопросов иллюстрируется в дальнейшем на некоторых типах социальных карт.

Обобщая в тип то особенное, что присуще целой группе единичных карт, получаем возможность лучше осознать предмет исследования.

Сочетание содержания и назначения карты обеспечивает ту совокупность признаков, которая достаточно характеризует тот или иной тип карты. Число таких типовых карт весьма значительно и, следует полагать, достигает не менее сотни карт. Разработка этих типов карт — дело будущего, дело коллективов квалифицированных советских картографов.

Большое положительное значение в деле развития советской социальной картографии имело бы составление атласа типов социальных карт СССР, но это можно сделать только после того, как будут разработаны отдельные отрасли социальной картографии.

**Работа по созданию новых типов социальных карт**

Эта работа в настоящее время выполняется путем исследований, проводимых молодыми картографами в их диссертационных работах, дипломных проектах, а также на производстве, где создаются отдельные карты и атласы по вопросам, связанным, главным образом, с экономикой и историей СССР. Так, Ю. С. Билич защищена кандидатская диссертация по разработке карт народного просвещения СССР, Е. Н. Никольской защищена кандидатская диссертация по картам здравоохранения, аспирантом А. В. Каменецким разрабатываются на мелкомасштабных картах сельского хозяйства СССР отдельные вопросы по картографированию. Многие дипломные проекты были посвящены отдельным темам по социальной картографии.

Но еще более существенным является тот факт, что в практике картографического производства начали появляться из социальных карт не только экономические и исторические, но и карты другой тематики. Так, в Географическом атласе СССР для 7 и 8 классов средней школы была помещена карта «Высшие учебные заведения и важнейшие научные учреждения СССР» (1951, стр. 60), в Географическом атласе для учителей средней школы (1954 г.) — карта народов СССР (стр. 106), плотности населения СССР (стр. 107), важнейшие маршруты русских

\* См. выпуск 24.

и советских путешественников (стр. 119). Пока единичные примеры таких карт показывают, однако, что различная тематика социальных карт начала привлекать и внимание производства.

### **Перспективы развития социальной картографии**

Не приходится сомневаться, что дальнейшее экономическое и культурное развитие нашей страны вызовет массовые потребности в различного рода социальных картах разнообразной тематики. Эта уверенность основывается на том, что уже в настоящее время не удовлетворены многие элементарные потребности в различных социальных картах. Так, например, у нас нет туристических карт, несмотря на все растущее развитие туризма, нет карты курортов и домов отдыха, хотя массовый отдых трудящихся у нас получил развитие и обеспечение впервые в истории человечества, нет карт памятников старины и искусства и многих других.

Дальнейшее развитие культуры нашей страны не может быть полноценным без соответствующего развития картографии и в первую очередь социальной картографии. Несомненно, что будут продолжать развиваться и те ее отделы, которые уже получили значительное развитие, как экономическая и историческая картография.

### **Отдельные типы социальных карт**

Исходя из указанного выше, остановимся на описании некоторых типов уже составленных социальных карт, отбирая их по содержанию и назначению.

#### **1. Антропологическая карта Средней Азии**

Карта масштаба 1 : 7 000 000 обзорная, составлена студенткой-дипломницей К. Е. Мерзляковой по данным профессоров антропологии Л. В. Ошанина и Г. Ф. Дебец. Карта устанавливает этногенез народов Средней Азии путем происхождения их от слияния различных так называемых «вторичных» рас и размещение их на территории современных советских республик Средней Азии. Это размещение показывает закономерное распределение по территории европеоидных и монголоидных признаков у отдельных современных народов в зависимости от истории их формирования. На карте фоном по определенным градациям показана степень монголоидности. Кроме того, значковым методом даны пункты антропологических исследований и экспедиций, а также ископаемых антропологических находок. Имеющаяся врезка представляет исторические пути движения «вторичных» рас. Карта имеет научное и образовательное значение, подтверждая основные положения марксизма-ленинизма по национальному вопросу.

#### **2. Этнографическая карта Западной Европы**

Карта масштаба 1 : 10 000 000 составлена студенткой-дипломницей Л. Н. Колосовой, отображает современное размещение народов Западной Европы по отдельным государствам, характеризующее свойственное капиталистическому миру пренебрежение к отдельным национальностям. Фон карты использован для показа размещения отдельных народов Западной Европы. Карта основана на материалах Института этнографии Академии наук СССР. Она имеет справочно-обзорный характер.

#### **3. Карта плотности населения СССР**

Карта плотности населения СССР из Географического атласа для учителей средней школы (стр. 107) масштаба 1 : 30 000 000. Карта составлена по данным переписи 1939 г. Плотность населения показана по

7 градациям — от почти незаселенных и незаселенных территорий, оставленных на карте незакрашенными, до территорий, характеризующихся плотностью свыше 100 человек на 1 км<sup>2</sup> и закрашенных в различные оттенки желто-оранжевых цветов, постепенно сгущающихся по мере возрастания плотности. Населенные пункты также разделены на 7 градаций — от пунктов с населением менее 10 тыс. чел. до городов с населением более 3 млн. Пунктоны населенных пунктов показаны кружками разной величины в условном масштабе. Карта имеет справочно-обзорное значение и достаточно хорошо отображает существующее размещение населения и городов. При исчислении плотности населения городское население исключено, что способствует отображению плотности населения ближе к реальной действительности.

#### 4. Карта роста городов Европейской части СССР (1897—1939)

Карта роста городов Европейской части СССР (1897—1939) масштаба 1 : 10 000 000, составлена студенткой-дипломницей Л. Н. Тимониной (Вольф) для атласа типа БСАМ, имеет справочный характер. На карте отображено изменение количества населения старых городов, появление новых городов с их населенностью. Материалами для составления карты явились данные переписей с их последующей обработкой.

#### 5. Высшие учебные заведения и важнейшие научные учреждения СССР

Карта учебная, из географического атласа СССР для 7 и 8 классов средней школы 1951 г. (стр. 60). Фоном карты показан рост числа учащихся в начальных, семилетних и средних школах за годы советской власти по четырем градациям — до 4 раз, от 4 до 10, от 10 до 100 и более 100 раз. Центры, имеющие высшие учебные заведения, нанесены на карту пунсонами пяти размеров в зависимости от количества вузов. Кроме того, цветом пунсона показан рост вузов за годы советской власти по четырем градациям в зависимости от процента новых вузов в данном центре (100 % новых, более 75 % новых, от 50 до 75 % и до 50 % новых). Наконец, флажками различных цветов показано размещение академий, как общих, так и отраслевых, а также филиалов Академии наук СССР. Карта представляет интерес, как первый опыт отображения в школьном атласе размещения вузов и научных учреждений.

#### 6. Экономическая карта Европейской России середины 90-х гг. XIX в. (по труду В. И. Ленина «Развитие капитализма в России»)

Историческая карта масштаба 1 : 10 000 000, составлена студенткой-дипломницей Т. Л. Мневой. Карта отображает экономику Европейской части России середины 90-х гг. XIX в. Основным ее содержанием является картографическое изображение всех положений В. И. Ленина в его знаменитом труде «Развитие капитализма в России», которые допускают картографирование. На карту нанесены районы товарного земледелия, охарактеризована социальная дифференциация крестьянства и другие моменты. По своему назначению карта является многоцелевой. Будучи картой исторической по существу, она имеет в то же время значение и политическое, и школьной карты, так как отображает с позиций марксизма важнейший социальный процесс прошлого нашей страны и может служить учебным пособием при изучении труда В. И. Ленина.

#### 7. Политико-административная карта Грузинской ССР, Азербайджанской ССР и Армянской ССР

Примером политической карты, в частности политико-административной, может служить карта «Политико-административная — Грузинская ССР, Азербайджанская ССР и Армянская ССР» масштаба

1 : 4 000 000, помещенная на стр. 10 Атласа СССР издания 1954 г. Обычная политико-административная карта отображает цветным фоном территорию каждой из трех помещенных на ней союзных республик, а также политические центры республик и административные центры входящих в них автономных республик и областей. Указанная карта, несмотря на ограниченное содержание, имеет весьма крупное политическое значение, так как отображает политику партии в области национального вопроса. Чтобы уяснить себе это, достаточно нанести на эту же карту границы существовавшего в царской России административного деления Закавказья. Уже это сопоставление превратит данную карту в агитационно-пропагандистскую, так как обнаружит резкую антинародную политику в административном делении страны при царизме.

#### 8. Экономическая карта Ферганской долины

Как пример экономической карты, посвященной отображению отдельных территориально-производственных комплексов (что до настоящего времени слабо развито в нашей экономической картографии), может служить небольшая карта Ферганской долины масштаба 1 : 3 000 000, помещенная в качестве врезки на стр. 155 Географического атласа для учителей средней школы. Эта карта представляет собою тип общеэкономической, в значительной мере комплексной карты. Фон использован для показа разными цветами характера использования и отдельными значками — сельскохозяйственных культур, а также полезных ископаемых. Развитие картографирования отдельных территориально-производственных комплексов, являющихся объектами интенсивного социалистического строительства и быстрого экономического преобразования отдельных территорий, представляет прогрессивную черту в развитии нашей экономической картографии.

#### 9. Карта рыболовных бассейнов СССР для атласа типа БСАМ

Карта рыболовных бассейнов СССР для атласа типа БСАМ масштаба 1 : 20 000 000 представляет дипломный проект студентки Н. И. Бакановой. Эта экономическая карта представляет собой опыт картографирования одной из важнейших отраслей пищевой промышленности СССР, которой в нашей картографии уделяется недостаточное внимание, хотя СССР по улову рыбы занимает второе место в мире (после Японии). Эта карта является отраслевой комплексной картой, стремящейся показать не только количественный и качественный характер рыболовства, но и обрабатывающую промышленность, обслуживающий рыболовство транспорт и другие, связанные с ним экономические моменты.

#### 10. Карта «Новые культуры, введенные за годы советской власти»

Как пример экономической обзорной карты, трактующей новую тематику, можно привести карту «Новые культуры, введенные за годы советской власти» масштаба 1 : 20 000 000, помещенную в Географическом атласе для учителей средней школы (стр. 118). На карте СССР значковым способом размещены районы разведения 27 новых культур, введенных за годы советской власти. Эта карта не отличается какими-либо достоинствами, так как локализация значков приблизительна, ориентиров для более точного отнесения культур к определенным районам недостаточно, значки не всегда удачны и хорошо различимы и, наконец, указание на размещение тех или иных культур именно в данном районе ничем не пояснено и ни с чем не связано. Тем не менее карта заслуживает упоминания, так как она посвящена одному из весьма многочисленных и важных вопросов, связанных с развитием социалистического сельского

хозяйства и требующих своего картографического отображения. Самая постановка данного вопроса, выхваченного из ряда других, не менее важных, свидетельствует о некотором движении мысли к новому.

#### 11. Карты «медицинской географии»

Академик Е. Н. Павловский, президент Всесоюзного географического общества, выступил на втором съезде географического общества СССР с докладом «О принципах изучения географии природно-очаговых и паразитарных болезней». В этом докладе, обобщающем под географическим углом зрения многолетние экспедиционные исследования и наблюдения в различных районах страны, академик Е. Н. Павловский выдвигает следующие положения:

1) разработаны методологические основы и рациональные методы установления наличия природно-очаговых трансмиссивных и паразитарных болезней на фоне географических ландшафтов с учетом краевой эпидемиологии и с выявлением социальных условий, определяющих заражение людей болезнями с природной очаговостью,

2) добыто много данных по изучению природно-очаговых болезней в СССР; с большой полнотой изучена природная очаговость клещевого возвратного тифа, клещевого и комариного энцефалитов, пендинской язвы, некоторых клещевых риккетсиозов, туляремии и других болезней».

В последующих выводах своего доклада, опирающихся на эти основные положения, академик Е. Н. Павловский указывает, что «пришло время и необходимость картирования данных по нозогеографии болезней с природной очаговостью и путей проникновения крупных эпидемий из-за рубежа» (п. 7).

Отмечая сугубую комплексность этой задачи, докладчик указывает, что «в ее разрешении советские географы должны принять активное участие» (п. 8). На своем докладе Е. Н. Павловский демонстрировал некоторые карты, посвященные этим задачам. Не касаясь существа указанных карт, важно подчеркнуть, что так называемая «медицинская география» докладчика является частью географии здравоохранения, охватывающей не только распространение болезней и их разносчиков, но и ряд других, не менее важных проблем — по обеспечению населения медицинской помощью, мер предупреждения и лечения заболеваний и т. д.

Все эти карты также относятся к социальным. Несомненно, что картографирование здравоохранения — этой сложной и весьма важной проблемы, связанной с населением, — в ближайшем будущем должно получить большое развитие.

#### 12. Карты, отображающие явления общественной идеологии и духовной культуры

Наиболее слабо развитыми из социальных карт являются карты, отображающие явления общественной идеологии и духовной культуры. Между тем, сюда входят такие обширные и важные области, как наука, школа, печать и искусство. Очень слабое картографирование этих явлений, особенно печати, искусства (в значительной степени и науки), объясняется неразвитостью их географии.

Но это объяснение явно недостаточно. Следует полагать, что пространственное размещение и этих весьма сложных социальных явлений имеет свои закономерности, так как развитие явлений во времени и размещение их в пространстве неразрывно связаны друг с другом. Вместе с тем очевидно, что общественно-исторические формации, определяющиеся способом производства, накладывают на размещение явлений свой отпечаток, обуславливающий различные закономерности для отдельных общественно-исторических ступеней развития. Но в условиях господства

в прошлом в нашей стране антагонистических общественных формаций, в частности капитализма, не могла возникнуть потребность изучать «географию общественной идеологии и духовной культуры». Такая потребность может возникнуть только в социалистическом обществе на высокой ступени его развития. И это потому, что только социалистическое общество может заботиться о развитии общественной идеологии и духовной культуры. Разумеется, эти исследования потребуют для своего развития значительного времени. Однако не следует сомневаться, что они будут произведены, так как это представляет и теоретический и практический интерес и вызывается потребностями всего общества.

### Пути дальнейшего развития социальной картографии

Все кратко охарактеризованные типы социальных карт далеко не охватывают всех типов. В этом нет, однако, необходимости, так как задача заключается только в том, чтобы дать своего рода иллюстрацию к изложенной выше классификации социальных карт. Эта иллюстрация убеждает в том, что сама жизнь, общественные потребности, независимо от каких бы то ни было классификационных схем, ведут к развитию социальной картографии в разнообразных направлениях.

Но это развитие происходит медленно. Между тем научная задача заключается в том, чтобы способствовать ускорению этого развития, приданию ему планомерного характера и улучшению качества вновь создаваемых карт. Таким образом, возникает вопрос о путях дальнейшего развития социальной картографии в СССР.

Дальнейшее развитие социалистического производства и культуры, как уже отмечено, выдвигает и будет выдвигать все новые и новые области социальной картографии и новые типы карт. Эти карты являются специальными. Поэтому для возможности их разработки необходимо сочетание знаний картографии и того специального круга социальных явлений, которые должны быть отображены на картах. Необходимо также иметь в виду, что подавляющее большинство этих видов мелкомасштабных карт, как карт специальных, потребует по сравнению с топографическими и общегеографическими картами сравнительно небольших тиражей, выражающихся десятками тысяч или даже несколькими тысячами экземпляров. Исключением в этом отношении являются карты экономические и исторические и атласы этих карт, получившие права гражданства в советской картографии и входящие в значительной мере в состав школьных карт и атласов, имеющих большие тиражи.

Все это позволяет сделать вывод, что развитие социальной картографии должно пойти в первую очередь путем развития ведомственной картографии. Ведомства и министерства, объединяющие в своем управлении обширные отрасли производства и культуры, естественно, обладают всеми необходимыми для этого материалами и специалистами в области производства и являются первыми потребителями соответствующей картографической продукции. Развитие социальной картографии через систему ГУГК всегда будет носить вследствие указанных выше причин ограниченный характер. Но для создания ведомственной картографии необходимым условием является организация в системах ведомств и министерств соответствующих картографических бюро или небольших групп картографов, которые занимались бы текущими вопросами ведомственной картографии, разрабатывали и составляли соответствующие карты и атласы и заботились о поддержании их на уровне современности.

Эти картографические группы или бюро могли бы включаться в состав ведомственных научно-исследовательских институтов, статистических



или плановых отделов в зависимости от всей совокупности конкретных условий. На ведомства и министерства должны были бы ложиться и заботы об издании соответствующих карт и атласов.

Разумеется, фактическое осуществление организации ведомственной картографии требует включения картографии в сферу обычных производственных заданий соответствующих министерств и ведомств. Следовательно, для внедрения в жизнь соответствующих ведомственных картографических ячеек должно пройти известное время в условиях растущей потребности в специальных картах.

Но развитие ведомственной картографии может быть успешным только при условии помощи со стороны крупных научно-исследовательских центров. Такими могут быть картографические научно-исследовательские учреждения как в системе ГУГК МВД СССР, так вузы и кафедры картографии, находящиеся в ведении МВО.

Большую роль должна была бы сыграть Академия наук СССР с ее многочисленными институтами и филиалами на местах, академии союзных ССР, специальные академии. От этих научно-исследовательских организаций надо ожидать научной разработки основных задач социальной картографии, а также помощи в осуществлении ведомствами и министерствами более крупных картографических начинаний. Однако эти научно-исследовательские учреждения ни в коем случае не должны были бы подменять собою ведомственных картографических работ. Это бы вредно отозвалось на жизненности и полезности отдельных картографических произведений, выполнение которых должно происходить в рамках соответствующего производства при помощи научных учреждений только в необходимых случаях. Инициатива соответствующего производства должна иметь в этом вопросе основное и важнейшее значение. При этом следует учесть, что такого рода инициативу следует ожидать не только от руководящих работников производства, но и от простых рабочих. Быстро развивающееся социалистическое производство несомненно предоставит в недалеком будущем требование на ряд новых карт, и не только мелких масштабов, если учесть, в частности, сельское хозяйство.

Но помимо изложенного основного пути, ведущего к развитию социальной картографии, следует со всей определенностью отметить, что значительное содействие развитию мелкомасштабной социальной картографии должен оказать и ГУГК МВД СССР, как мощнейшее в стране картографическое, картосоставительское и картоиздательское производство. Развитие социальной картографии в этой системе будет совершаться не только путем дальнейшего усовершенствования экономической и исторической картографии через систему школьных атласов и карт, но и путем расширения тематики карт в этих атласах, а также составления и издания разного рода карт и атласов по инициативе соответствующих ведомств.

Перед социальной картографией в целом существуют громадные перспективы в нашей стране. Их осуществление потребует значительных картографических кадров.

Отдельные области социальной картографии находятся в разной степени их потенциального развития. Из них две обширные области имеют все предпосылки для ближайшего роста. Это народное просвещение и здравоохранение. Эти области культуры имеют не только свою весьма значительную по времени историю развития в нашей стране, но и историю своей картографии. Потребность же в картах просвещения и здравоохранения весьма разнообразна. Бурное развитие науки в нашей стране выдвигает потребность ее картографирования.

Нельзя также не упомянуть, что, несмотря на крупное развитие экономической картографии, картографирование нашего сельского хозяйства отстало от требований жизни и производства.

Нельзя не быть твердо уверенным в том, что наше отставание от жизни во всех этих отраслях в ближайшие же годы будет полностью ликвидировано, и наша советская картография обогатится рядом новых замечательных карт и атласов.

КОНТРОЛЕР № \_\_\_\_\_

При обнаружении дефекта, просьба  
возвратить книгу вместе с ярлыком для  
обмена по адресу: гор. Рига, Б. Алтона-  
вас, д. № 43. Картографическая фабрика.

Расходы по пересылке возмещаются фабрикой.

STAT

**Page Denied**